# ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 20 | Juni 1940 | Heft 3


## Inhalt:


| | Seite |
|---|---|
| Hauptaufsätze. A. W. Maue: Zur Stabilität der Kármánschen Wirbelstraße | 129 |
| H. Görtler: Über den Einfluß der Wandkrümmung auf die Entstehung der Turbulenz | 138 |
| F. Vandrey: Beitrag zur Theorie des Tragflügels in schwach inhomogener Parallelströmung | 148 |
| Fr. Florin: Ebene Bewegung eines Wirbelkranzes am rotierenden radialen Schaufelstern von endlichen Schaufellängen | 152 |
| K. Magnus: Untersuchungen zur Verminderung störender Rüttelschwingungen an Kreiselgeräten | 165 |
| R. Sauer: Graphische Statik räumlicher Kräftesysteme mit Hilfe der dualen Kräfteabbildung | 174 |
| Buchbesprechungen. Weinig: Aerodynamik der Luftschraube. — Droste: Die Lösung angewandter Differentialgleichungen mittels Laplacescher Transformation. — Diesselhorst: Magnetische Felder und Kräfte mit einer Übersicht über die Vektorenrechnung. — Lohr: Vektor- und Dyadenrechnung für Physiker und Techniker. — Albert: Structure of Algebras. — Krull: Elementare Algebra vom höheren Standpunkt. — Publicazioni dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo. — Peters: Sechsstellige Tafeln der trigonometrischen Funktionen. — Drenckhahn: Geländemathematik. — Weiter eingegangene Bücher | 180 |
| Nachrichten | 183 |
| Zuschriften | 184 |


# HAUPTAUFSÄTZE

## Zur Stabilität der Kármánschen Wirbelstraße.


Von *A. W. Maue* in München.


Der ursprüngliche Plan der Arbeit war, die Kármánschen Stabilitätsuntersuchungen über Wirbelstraßen[1]) auf neuem Wege zu wiederholen. Dabei sollte, um das etwas schwerfällige Rechnen mit unendlichen Summen zu vermeiden, voller Gebrauch von den funktionentheoretischen Hilfsmitteln gemacht werden, die für die Behandlung des Problems zur Verfügung stehen, aber bisher nicht ausgenützt worden sind. Im Laufe der Durchführung dieser Aufgabe zeigte es sich, daß der von Kármán betrachtete Fall einer stabilen Wirbelstraße nur ein Sonderfall aus einer ganzen Schar ähnlicher Wirbelanordnungen ist, die ebenfalls stabil sind. Die vorliegende Arbeit wird daher diese allgemeineren Wirbelstraßen mit in ihre Betrachtungen einbeziehen. Um deutlich zu machen, in welcher Richtung die Verallgemeinerung liegt, nehmen wir die wichtigsten Angaben über Inhalt und Ergebnisse der Arbeit vorweg.

Wir betrachten eine ebene Flüssigkeitsströmung, die, abgesehen von geraden Wirbelfäden senkrecht zur Strömungsebene, wirbelfrei ist. Diese Wirbelfäden, kurz Wirbel genannt, seien in zwei parallelen unendlich langen Reihen angeordnet. Innerhalb beider Reihen folgen die Wirbel in gleichem Abstand aufeinander. Diesen Abstand nennen wir die Teilung der Wirbelreihen. Die Wirbel haben alle gleiche Stärke und in beiden Reihen verschiedenen Drehsinn.

Beide Wirbelreihen können in verschiedener Weise gegeneinander angeordnet sein. Kármán betrachtet die beiden in den Bildern 1 und 2 dargestellten Anordnungen. Die erste erweist sich als stets labil, die zweite ist stabil für ein bestimmtes Zahlenverhältnis von Straßenbreite $h$ zu Teilung $l$ der Wirbelreihen. Dieses Verhältnis ist $\frac{h}{l}=0{,}28$ und ist festgelegt durch die Beziehung

$$\operatorname{Sin}\frac{h\pi}{l}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

[1]) Th. v. Kármán und H. Rubach: Phys. Z. Bd. 13 (1912), S. 49. — L. Prandtl: Abriß der Strömungslehre, Braunschweig 1931, Abschn. III, § 12. — Prandtl-Tietjens: Hydro- und Aeromechanik, Berlin 1929 u. 1931, II. Bd., S. 145. — W. Kaufmann: Hydromechanik, Berlin 1931 u. 1934, I. Bd., S. 191. — Lamb: Hydrodynamics, 4. Aufl., Cambridge 1916, S. 218. — Frank-v. Mises: Differentialgleichungen der Physik, 2. Aufl., II. Bd., Braunschweig 1935, S. 465.

Hier betrachten wir den allgemeinen Fall von Bild 3, in dem $d$ eine beliebige Strecke mit einer Länge zwischen 0 und $l$ ist. Die Stabilitätsuntersuchung liefert für jeden $d$-Wert ein Verhältnis $\frac{h}{l}$, für das die Wirbelanordnung stabil ist. Es ist gegeben durch die Beziehung

$$\operatorname{Sin}\frac{h\pi}{l}=\sin\frac{d\pi}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Bild 1. Wirbelstraße, erste von Kármán betrachtete Anordnung.

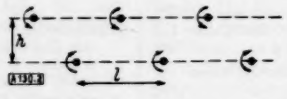



Bild 2. Wirbelstraße, zweite von Kármán betrachtete Anordnung.

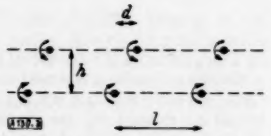



Bild 3. Wirbelstraße, allgemeine Anordnung.

Unsere allgemeine Betrachtung umschließt die beiden vorgenannten Fälle als Sonderfälle. Für $d=\frac{l}{2}$ geht Bild 3 in Bild 2 und Gl. (2) in Gl. (1) über. Für $d=0$ (Bild 1) folgt aus Gl. (2) $h=0$; d. h. die Wirbelstraße artet aus, indem die Wirbel beider Reihen zusammenfallen. Die Anordnung von Bild 1 mit endlicher Straßenbreite $h$ ist also jedenfalls nicht stabil, in Übereinstimmung mit der Kármánschen Feststellung.

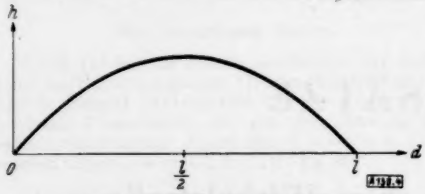



Bild 4. Graphische Darstellung zur Stabilitätsbedingung (Gl. (2)).

Der in Gl. (2) angegebene Zusammenhang zwischen $d$ und $h$ ist in Bild 4 graphisch wiedergegeben. Der Anordnung $d=\frac{l}{2}$ entspricht danach die größte Straßenbreite $h$ bei gegebener Teilung $l$.

Es sei noch bemerkt, daß die beiden Fälle $d=0$ und $d=\frac{l}{2}$ dadurch ausgezeichnet sind, daß sich die Wirbelstraße, d. h. die ganze Wirbelanordnung, in ihrer Längsrichtung bewegt, wenn wir voraussetzen, daß die Flüssigkeit im Unendlichen ruht. In allen anderen Fällen erfolgt die Fortbewegung der Wirbelstraße in schräger Richtung.

## § 1. Die ungestörte Wirbelstraße.

**1. Die ebene Potentialströmung.** Wir benutzen die Theorie der ebenen Potentialbewegung. Die Strömung erfolge in der komplexen $z$-Ebene mit $z=x+iy$. Die komplexe Geschwindigkeit sei $w=u+iv$, die zugehörige komplexe Strömungsfunktion $f(z)=\varphi+i\psi$, wobei $\varphi$ das Geschwindigkeitspotential und $\psi$ die Stromfunktion ist. Zwischen $f(z)$ und $w$ besteht die Beziehung

$$w^*=\frac{df}{dz} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Der Stern bedeutet Übergang zum konjugiert komplexen.

**2. Strömungen mit Wirbeln.** Die Strömungsfunktion

$$f(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i}\lg(z-z_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

beschreibt eine Strömung, die in $z=z_0$ einen Wirbel mit positivem Drehsinn und der Wirbelstärke $\Gamma$ besitzt.

Ist $g(z)$ eine ganze Funktion mit nur einfachen Nullstellen, so besitzt die Strömung

$$f(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i}\lg g(z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

in allen diesen Nullstellen Wirbel der Stärke $\Gamma$ mit positivem Drehsinn. Führen wir zwei ganze Funktionen mit nur einfachen Nullstellen $g_1(z)$ und $g_2(z)$ ein, so können wir die Strömung angeben, die in den Nullstellen von $g_1$ positive und in denen von $g_2$ negative Wirbel, alle von der gleichen Stärke $\Gamma$, besitzt. Sie lautet:

$$f(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i}\lg\frac{g_1(z)}{g_2(z)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

**3. Fortbewegung der Wirbel.** Während die Strömung eines einzelnen Wirbels stationär ist, gilt das für Strömungen mit mehreren Wirbeln im allgemeinen nicht mehr. Vielmehr bewegt sich jeder Wirbel unter dem Einfluß der anderen Wirbel; er nimmt an der Bewegung des Geschwindigkeitsfeldes der übrigen Wirbel teil[2]).

Wir wollen die Geschwindigkeit berechnen, mit der sich ein Wirbel der Strömung (6) fortbewegt. Ein positiver Wirbel befinde sich etwa in $z=z_1$. Dann gilt

$$g_1(z_1)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Wir entwickeln $f(z)$ in $z=z_1$. Die Entwicklung lautet mit Rücksicht auf Gl. (7):

$$f(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i}\left\{\lg(z-z_1)+\lg\frac{g'_1(z_1)}{g_2(z_1)}+\left(\frac{g''_1(z_1)}{2g'_1(z_1)}-\frac{g'_2(z_1)}{g_2(z_1)}\right)(z-z_1)+\cdots\right\}=\frac{\Gamma}{2\pi i}\lg(z-z_1)+f_1(z) \quad (8).$$

Im letzten Ausdruck von Gl. (8) haben wir $f(z)$ in zwei Teile gespalten. Der erste beschreibt das vom Wirbel $z=z_1$ herrührende Geschwindigkeitsfeld, der zweite $f_1(z)$ das Feld der übrigen Wirbel. Das letztere ist für die Fortbewegung des Wirbels in $z_1$ maßgebend. Wir erhalten die Geschwindigkeit $w_1$ dieser Bewegung, wenn wir Gl. (3) auf $f_1(z)$ anwenden und $z=z_1$ setzen:

$$w_1^*=\frac{df_1}{dz}=\frac{\Gamma}{2\pi i}\left(\frac{g''_1(z_1)}{2g'_1(z_1)}-\frac{g'_2(z_1)}{g_2(z_1)}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Entsprechend ergibt sich die Geschwindigkeit $w_2$ eines in $z_2$ gelegenen negativen Wirbels:

$$w_2^*=-\frac{\Gamma}{2\pi i}\left(\frac{g''_2(z_2)}{2g'_2(z_2)}-\frac{g'_1(z_2)}{g_1(z_2)}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

Gl. (10) geht aus Gl. (9) durch Vorzeichenumkehr und Vertauschung der Indizes 1 und 2 hervor.

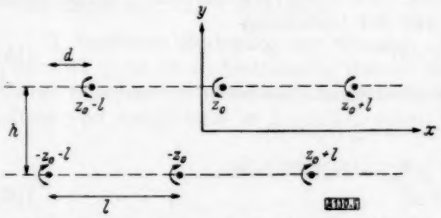



Bild 5. Lage der Wirbel in der komplexen Ebene.

**4. Anwendung auf die Wirbelstraße.** Wir gehen zur Betrachtung der Wirbelstraße (Bild 5) über, die in den Punkten $z_0+n\,l$ ($n$ reell ganzzahlig) positive, in $-z_0+n\,l$ negative Wirbel gleicher Stärke $\Gamma$ besitzt. Die zugehörige Strömungsfunktion erhalten wir, wenn wir in Gl. (6)

$$g_1(z)=\sin\frac{(z-z_0)\pi}{l}, \qquad g_2(z)=\sin\frac{(z+z_0)\pi}{l} \quad (11)$$

setzen. Diese beiden Funktionen besitzen in den geforderten Wirbelpunkten Nullstellen. Es ergibt sich

$$f(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i}\lg\frac{\sin\frac{(z-z_0)\pi}{l}}{\sin\frac{(z+z_0)\pi}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

Die Strömung (12) ist außer durch ihre Wirbelanordnung dadurch gekennzeichnet, daß die Flüssigkeit im Unendlichen ruht. Davon überzeugen wir uns, indem wir $z$ gegen $\pm i\infty$ gehen lassen. $f(z)$ strebt dann nämlich dem konstanten Grenzwert $-\frac{\Gamma z_0}{i\,l}$ (mod. $\Gamma$) zu.

Um die zeitliche Änderung des Wirbelbildes zu bestimmen, berechnen wir die Geschwindigkeit des Wirbels $z=z_1=z_0$ nach Gl. (9) und die des Wirbels $z=z_2=-z_0$ nach Gl. (10) unter Verwendung der Funktionen (11). Für $w_1$ und $w_2$ ergibt sich derselbe Wert, den wir $w_0$ nennen, und zwar ist

$$w_0^*=-\frac{\Gamma}{2\,i\,l}\operatorname{ctg}\frac{2\pi z_0}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13).$$

Mit den Wirbeln in $z_0$ und $-z_0$ kommt wegen der Symmetrie der Anordnung auch allen andern Wirbeln die gleiche Geschwindigkeit zu. Das ganze Strömungsbild bewegt sich also mit der Geschwindigkeit $w_0$.

## § 2. Ableitung der Stabilitätsbedingung.

Um die Stabilität unserer Strömung zu untersuchen, haben wir uns die Wirbel um beliebige kleine Strecken aus ihrer Lage verschoben zu denken und die so entstehende gestörte Strömung zu betrachten. Für diese die Strömungsfunktion zu finden, ist unsere

[2]) Vgl. z. B. Prandtl-Tietjens, I. Bd., S. 194.

nächste Aufgabe. Während die funktionentheoretische Beschreibung mittels einer komplexen Strömungsfunktion für die ungestörte Wirbelstraße (Gl. (12)) allgemein üblich (a. a. O.) ist, ist diese Art der Darstellung für die gestörte Strömung nicht gebräuchlich.

Zur Vereinfachung der folgenden Rechnung setzen wir in §§ 2 und 3 $\Gamma = 2\pi$ und $l = 1$.

**1. Die gestörte Wirbelstraße.** Die Störung berücksichtigen wir, indem wir in Gl. (6) für $g_1(z)$, $g_2(z)$ statt der Ausdrücke (11) jetzt setzen

$$\left.\begin{aligned} g_1(z) &= \sin(z - z_0)\pi - \pi \cdot \zeta_1(z) \\ g_2(z) &= \sin(z + z_0)\pi - \pi \cdot \zeta_2(z) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14).$$

Die analytischen Funktionen $\zeta_1(z)$ und $\zeta_2(z)$ werden dabei im Gebiete der Wirbelstraße, d. h. in einem Streifen längs der reellen Achse, als dem Betrage nach klein gegen 1 vorausgesetzt. Auf diese Weise erreichen wir erstens, daß sich die Nullstellen von $g_1(z)$ und $g_2(z)$ und damit die Wirbel nur wenig gegenüber ihrer ungestörten Lage verschieben, und zweitens, daß im Gebiete der Wirbelstraße keine neuen Nullstellen hinzukommen. Um auch im übrigen Teil der komplexen Ebene beiderseits der Wirbelstraße das Auftreten neuer Nullstellen zu verhindern, genügt es, die Beträge von $\zeta_1$ und $\zeta_2$ als klein gegenüber den (mit dem Abstand von der Wirbelstraße wachsenden) Beträgen der Sinusfunktionen in Gl. (14) anzunehmen. Da in den folgenden Rechnungen nur die Werte von $\zeta_1$ und $\zeta_2$ im Bereich der Wirbelstraße eine Rolle spielen, dürfen wir quadratische Glieder in $\zeta_1, \zeta_2$ vernachlässigen. Insbesondere entspricht es einer Vernachlässigung quadratischer Glieder, wenn wir zwischen den Funktionswerten von $\zeta_1, \zeta_2$ in den unverschobenen und den verschobenen Wirbelpunkten keinen Unterschied machen.

Wir berechnen die Verschiebungen der Wirbel gegenüber ihrer ungestörten Lage, wie sie durch Gl. (14) gegeben sind. Die unverschobenen Wirbel der oberen Reihe liegen in den Punkten $z_0 + n$. Nennen wir die Verschiebung des $n$-ten Wirbels $s_n^{(1)}$, so ist seine gestörte Lage $z_0 + n + s_n^{(1)}$. Wir entnehmen $s_n^{(1)}$ aus der Gleichung

$$g_1(z_0 + n + s_n^{(1)}) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15).$$

Die Ausrechnung liefert unter Vernachlässigung quadratischer Glieder in $\zeta_1$ und $s_n^{(1)}$

$$\begin{aligned} g_1(z_0 + n + s_n^{(1)}) &= \sin(n + s_n^{(1)})\pi - \pi \cdot \zeta_1(z_0 + n) \\ &= (-1)^n \cdot s_n^{(1)}\pi - \pi \cdot \zeta_1(z_0 + n) = 0, \end{aligned}$$

also

$$s_n^{(1)} = (-1)^n \cdot \zeta_1(z_0 + n) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

Entsprechend ergibt sich für die Verschiebung $s_n^{(2)}$ des $n$-ten Wirbels der unteren Reihe, dessen unverschobene Lage $-z_0 + n$ ist,

$$s_n^{(2)} = (-1)^n \cdot \zeta_2(-z_0 + n) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17).$$

**2. Die zeitliche Änderung der Wirbelverteilung.** Wir untersuchen die Fortbewegung des Wirbels, dessen ungestörte Lage $z_0$ war. Hierzu verwenden wir Gl. (9), in der wir $z_1 = z_0 + s_0^{(1)} = z_0 + \zeta_1(z_0)$ setzen. Zunächst berechnen wir die benötigten Funktionswerte von $g_1$, $g_2$ und ihren Ableitungen und vernachlässigen, wie vorgesehen, quadratische Glieder in $\zeta_1$, $\zeta_2$. Wir erhalten

$$\left.\begin{aligned} g'_1(z_1) &= \pi - \pi \cdot \zeta'_1, \\ g''_1(z_1) &= -\pi^2 \zeta_1 - \pi \zeta''_1, \\ g_2(z_1) &= \sin 2\pi z_0 + \pi \zeta_1 \cdot \cos 2\pi z_0 - \pi \zeta_2, \\ g'_2(z_1) &= \pi \cos 2\pi z_0 - \pi^2 \zeta_1 \cdot \sin 2\pi z_0 - \pi \zeta'_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18).$$

$\zeta_1$, $\zeta_2$ und ihre Ableitungen sind dabei an der Stelle $z_1$ zu nehmen, wofür wir, wie oben begründet, in diesen kleinen Funktionen auch einfach $z_0$ setzen dürfen. Gl. (9) liefert schließlich mit $\Gamma = 2\pi$ und $l = 1$ unter neuerlicher Vernachlässigung quadratischer Glieder in $\zeta_1$, $\zeta_2$ die Geschwindigkeit $w_1$ des betrachteten Wirbels. Es ergibt sich

$$w_1^* = i\pi \operatorname{ctg} 2\pi z_0 + i\left\{\frac{\pi^2 \zeta_1 + \zeta''_1}{2} - \frac{\pi^2 \zeta_1}{\sin^2 2\pi z_0} + \frac{\pi}{\sin 2\pi z_0}(\pi \zeta_2 \cdot \operatorname{ctg} 2\pi z_0 - \zeta'_2)\right\} \quad (19).$$

Das erste Glied stimmt wegen $\Gamma = 2\pi$ und $l = 1$ mit $w_0^*$ von Gl. (13) überein, entspricht also der Bewegung der ungestörten Wirbelstraße. Die restlichen Glieder zeigen eine zusätzliche Bewegung des betrachteten Wirbels an, entsprechen also einer zeitlichen Änderung der Verschiebung $s_0^{(1)} = \zeta_1(z_0)$. Es gilt demnach, wenn wir die zeitliche Differentiation durch einen Punkt andeuten, die Beziehung

$$\dot{\zeta}_1^* = i\left\{\frac{\pi^2 \zeta_1 + \zeta''_1}{2} - \frac{\pi^2}{\sin^2 2\pi z_0} \cdot \zeta_1 + \frac{\pi}{\sin 2\pi z_0}(\pi \zeta_2 \cdot \operatorname{ctg} 2\pi z_0 - \zeta'_2)\right\} \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

Eine entsprechende Beziehung muß auch für die übrigen Wirbel der oberen Reihe gelten. Da diese in keiner Weise vor dem betrachteten ausgezeichnet sind, gilt für sie dieselbe Beziehung (20) mit dem einzigen Unterschied, daß jetzt als Argument von $\zeta_1$ und $\zeta_2$ statt $z_0$ bei Betrachtung des $n$-ten Wirbels $z_0+n$ zu verwenden ist. In den vorkommenden trigonometrischen Funktionen sin und ctg ist diese Ersetzung von $z_0$ durch $z_0+n$ belanglos. Wir können demnach zu Gl. (20) als Ergänzung hinzufügen:

$$\left.\begin{aligned}\zeta_1 &= \zeta_1(z_0+n)\\ \zeta_2 &= \zeta_2(z_0+n)\end{aligned}\right\} \quad n \text{ reell ganz} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

In derselben Weise kann die untere Reihe untersucht werden. Wir haben hierzu statt Gl. (9) die Gl. (10) zu verwenden oder, was dasselbe ist, auf der rechten Seite von Gl. (9) das Vorzeichen umzukehren und die Indizes 1 und 2 sowohl der Funktionen $g_1$, $g_2$ als auch ihrer Argumente $z_1$, $z_2$ zu vertauschen. Diese Indexvertauschung ist gleichbedeutend mit einer Vertauschung von $\zeta_1$ mit $\zeta_2$ und von $z_0$ mit $-z_0$. Statt der Gln. (20) und (21) ergibt sich so für die untere Wirbelreihe

$$\dot{\zeta}_2^{\,*} = -i\left\{\frac{\pi^2\zeta_2+\zeta''_2}{2} - \frac{\pi^2}{\sin^2 2\pi z_0}\cdot\zeta_2 + \frac{\pi}{\sin 2\pi z_0}(\pi\zeta_1\cdot\operatorname{ctg} 2\pi z_0+\zeta'_1)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

mit

$$\left.\begin{aligned}\zeta_1 &= \zeta_1(-z_0+n)\\ \zeta_2 &= \zeta_2(-z_0+n)\end{aligned}\right\} \quad n \text{ reell ganz} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Damit haben wir die Differentialgleichungen aufgestellt, die die zeitliche Entwicklung einer einmal hervorgerufenen Störung beherrschen; denn die Funktionswerte von $\zeta_1$, $\zeta_2$ in den Wirbelpunkten sind ja wegen der Gln. (16) und (17) bis auf den Faktor $(-1)^n$ mit den Verschiebungen $s_n^{(1)}$, $s_n^{(2)}$ identisch.

**3. Spektrale Zerlegung der Störung.** Es besteht nunmehr die Aufgabe, die Funktionen $\zeta_1(z)$ und $\zeta_2(z)$ so zu bestimmen, daß sie beliebig vorgegebenen Verschiebungen $s_n^{(1)}$, $s_n^{(2)}$ der Wirbel entsprechen. Wir denken uns zu diesem Zwecke die Störung aus Störungswellen aufgebaut und entwickeln in Fourierscher Weise

$$\left.\begin{aligned}(-1)^n\cdot s_n^{(1)} &= \zeta_1(z_0+n) = \int_{-\pi}^{\pi}\chi_1(\varphi)\,e^{in\varphi}\,d\varphi\\ (-1)^n\cdot s_n^{(2)} &= \zeta_2(-z_0+n) = \int_{-\pi}^{\pi}\chi_2(\varphi)\,e^{in\varphi}\,d\varphi\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Dabei haben wir, um uns in den folgenden Rechnungen von dem Faktor $(-1)^n$ zu befreien, nicht $s_n^{(1,2)}$ selbst, sondern $(-1)^n\cdot s_n^{(1,2)}$ entwickelt. Da es sich bei den Größen $s_n^{(1)}$, $s_n^{(2)}$ um die Verschiebungen diskreter Punkte handelt, ist der Integrationsbereich für $\varphi$ endlich.

Es lassen sich nun leicht Funktionen $\zeta_1(z)$, $\zeta_2(z)$ angeben, die in den Wirbelpunkten $z_0+n$, $-z_0+n$ die durch Gl. (24) vorgeschriebenen Werte annehmen. Wir können nämlich einfach schreiben

$$\zeta_1(z) = \int_{-\pi}^{\pi}\chi_1(\varphi)\,e^{i(z-z_0)\varphi}\,d\varphi, \qquad \zeta_2(z) = \int_{-\pi}^{\pi}\chi_2(\varphi)\,e^{i(z+z_0)\varphi}\,d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Das ist zwar nicht die einzige Möglichkeit, $\zeta_1(z)$ und $\zeta_2(z)$ in Einklang mit Gl. (24) zu wählen. Doch ist diese Wahl dadurch ausgezeichnet, daß das Spektrum von $\zeta_1(z)$ und $\zeta_2(z)$ nur Wellenzahlen $|\varphi|\leqq\pi$ enthält. Wellenzahlen $|\varphi|>\pi$ dürfen wir aber deswegen nicht zulassen, weil sie zur Folge haben würden, daß $\zeta_1$, $\zeta_2$ für große positiv oder negativ imaginäre $z$ größer als sin $(z\mp z_0)\,\pi$ sein würden, in Widerspruch mit unseren Forderungen von Ziffer 1.

**4. Schwingungsgleichungen für die Amplituden der Störungswellen.** Wir gehen mit dem Ansatz (25) in Gl. (20) ein und berücksichtigen die Gl. (21). Es ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\chi_1^{\,*}(\varphi)\,e^{-in\varphi}\,d\varphi = i\int_{-\pi}^{\pi}\Bigg\{&\left(\frac{\pi^2-\varphi^2}{2}-\frac{\pi^2}{\sin^2 2\pi z_0}\right)\chi_1(\varphi)\\ &+\frac{\pi}{\sin 2\pi z_0}(\pi\operatorname{ctg} 2\pi z_0 - i\varphi)\,\chi_2(\varphi)\,e^{2iz_0\varphi}\Bigg\}\,e^{in\varphi}\,d\varphi\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (26).$$

Gleichsetzung der Koeffizienten von $e^{in\varphi}$ auf beiden Seiten von Gl. (26) liefert mit den Abkürzungen

$$A = i\left(\frac{\pi^2-\varphi^2}{2}-\frac{\pi^2}{\sin^2 2\pi z_0}\right), \qquad B = \frac{i\pi^2\cos 2\pi z_0}{\sin^2 2\pi z_0}, \qquad C = \frac{\pi\varphi}{\sin 2\pi z_0} \quad . \quad . \quad . \quad (27).$$

XUM

Die Gleichung

$$\dot{\chi}_1^*(-\varphi) = A\,\chi_1(\varphi) + (B+C)\,e^{2iz_0\varphi}\,\chi_2(\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Ebenso ergibt sich, wenn wir von Gl. (22) ausgehen:

$$\dot{\chi}_2^*(-\varphi) = -A\,\chi_2(\varphi) - (B-C)\,e^{-2iz_0\varphi}\,\chi_1(\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Die Gl. (28) und (29) sind lineare Differentialgleichungen, die die zeitliche Änderung der Wellenamplituden $\chi_1$, $\chi_2$ bestimmen.

**5. Stabilität gegenüber Störungswellen mit $\varphi = 0$.** Besonders einfach liegen die Verhältnisse im Falle $\varphi = 0$, den wir zunächst betrachten wollen.

Schreiben wir statt $\chi_1(0), \chi_2(0)$ einfach $\chi_1, \chi_2$, so lauten die Gl. (28) und (29) mit Rücksicht auf $C = 0$

$$\dot{\chi}_1^* = A\,\chi_1 + B\,\chi_2, \qquad \dot{\chi}_2^* = -A\,\chi_2 - B\,\chi_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Durch Addition und Subtraktion beider Gleichungen erhalten wir, wenn wir die Abkürzungen

$$\sigma = \chi_1 + \chi_2, \qquad \tau = \chi_1 - \chi_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

einführen und in der ersten der beiden entstehenden Gleichungen sogleich zum konjugierten übergehen,

$$\dot{\sigma} = (A^* - B^*)\,\tau^*, \qquad \dot{\tau}^* = (A+B)\,\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

Setzen wir die Zeitabhängigkeit von $\sigma$ und $\tau^*$ in der Form $e^{i\omega t}$ an, so haben wir

$$\omega^2 = -(A^* - B^*)(A+B) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33).$$

Um $\omega$ auszurechnen, bilden wir nach Gl. (27) mit Rücksicht auf $\varphi = 0$ die Ausdrücke

$$A = -\frac{i\pi^2(1+\cos^2 2\pi z_0)}{2\sin^2 2\pi z_0}, \qquad A \pm B = -\frac{i\pi^2}{2\sin^2 2\pi z_0}(1 \mp \cos 2\pi z_0)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34).$$

Einsetzen in Gl. (33) und Ziehen der Wurzel ergibt

$$\omega = \pm\, i\,\frac{\pi^2}{2\,|\sin 2\pi z_0|^2}(1+\cos 2\pi z_0^*)(1-\cos 2\pi z_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35).$$

Die beiden Werte für $\omega$ unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen. Sind sie reell, so besagt der Zeitfaktor $e^{i\omega t}$, daß die Störungsamplituden $\sigma$, $\tau^*$ und damit auch $\chi_1$, $\chi_2$ oszillieren, d. h. die Wirbelpunkte kleine Schwingungen um ihre ungestörte Lage ausführen. Wir haben dann Stabilität. Sind die $\omega$-Werte dagegen wesentlich komplex, so entspricht der eine einem exponentiellen Abklingen der Amplituden $\sigma$ und $\tau^*$ mit der Zeit, der andere einem exponentiellen Ansteigen. Es liegt Labilität vor.

Demnach lautet die Stabilitätsbedingung:

$$\omega \text{ reell.}$$

Um diese Bedingung auf den Ausdruck (35) anwenden zu können, spalten wir das Produkt $(1+\cos 2\pi z_0^*)(1-\cos 2\pi z_0)$ in Realteil $1 - |\cos 2\pi z_0|^2$ und Imaginärteil $\cos 2\pi z_0^* - \cos 2\pi z_0$. Als Stabilitätsbedingung erhalten wir dann

$$|\cos 2\pi z_0|^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36).$$

Um die Bedeutung dieser Forderung zu erkennen, setzen wir (vgl. Bild 5)

$$2z_0 = d + ih \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37).$$

Dann erhält Gl. (36) wegen

$$\cos 2\pi z_0 = \cos d\pi \cdot \operatorname{Cos} h\pi - i \sin d\pi \cdot \operatorname{Sin} h\pi$$

die Form

$$\cos^2 d\pi \cdot \operatorname{Cos}^2 h\pi + \sin^2 d\pi \cdot \operatorname{Sin}^2 h\pi = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38).$$

Drücken wir in dieser Gleichung mit Hilfe der Formeln

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \qquad \operatorname{Cos}^2 x - \operatorname{Sin}^2 x = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

die Kosinus durch die Sinus aus, so folgt

$$\sin^2 d\pi = \operatorname{Sin}^2 h\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

und schließlich, da beide Sinus positiv sind,

$$\sin d\pi = \operatorname{Sin} h\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

als endgültige Stabilitätsbedingung. Das ist mit Rücksicht auf $l = 1$ die gleiche Bedingung, die wir am Anfang der Arbeit in Gl. (2) angegeben und besprochen haben.

**6. Stabilität gegenüber beliebigen Störungswellen.** Wir haben die Stabilitätsuntersuchung bisher nur für Störungswellen mit $\varphi = 0$ geführt[3]). Es bleibt zu zeigen, daß Wirbelstraßen mit den durch Gl. (41) geforderten geometrischen Abmessungen gegenüber Störungswellen von beliebigem $\varphi$[4]) stabil sind. Der Beweis ist ziemlich langwierig und für das allgemeine Verständnis des Gegenstandes von zweitrangiger Bedeutung. Er soll aus diesen Gründen in einem gesonderten Abschnitt (§ 3) geführt werden.

Der entsprechende Beweis für den Kármánschen Sonderfall $d = \frac{l}{2}$ von Bild 2 ist bei Lamb (a. a. O., S. 222/223) angegeben, während er in der Kármánschen Originalarbeit (a. a. O.) unterdrückt ist.

## § 3. Störungen beliebiger Wellenlänge.

**1. Schwingungsgleichungen für die Amplituden beliebiger Störungswellen.** Wir schreiben in den Gln. (28) und (29) zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \chi_1(\varphi) &= \alpha, & \chi_2(\varphi) &= \beta \\ \chi_1^*(-\varphi) &= \alpha', & \chi_2^*(-\varphi) &= \beta' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

und fügen durch Ersetzung von $\varphi$ durch $-\varphi$ und gleichzeitigen Übergang zum konjugiert komplexen zwei weitere Gleichungen hinzu. Das entstehende System von vier Differentialgleichungen lautet nach geeigneter Anordnung:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \quad A^* \cdot \alpha' + (B^* - C^*)\, e^{2iz_0^*\varphi} \cdot \beta' \\ \dot{\beta} &= -A^* \cdot \beta' - (B^* + C^*)\, e^{-2iz_0^*\varphi} \cdot \alpha' \\ \dot{\alpha}' &= \quad A \cdot \alpha + (B + C)\, e^{2iz_0\varphi} \cdot \beta \\ \dot{\beta}' &= -A \cdot \beta - (B - C)\, e^{-2iz_0\varphi} \cdot \alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43).$$

Der Zeitansatz $e^{i\omega t}$ führt zu einem System gewöhnlicher linearer homogener Gleichungen. $\omega$ wird durch die Säkulargleichung

$$\begin{vmatrix} -i\omega & 0 & A^* & (B^* - C^*)\, e^{2iz_0^*\varphi} \\ 0 & -i\omega & -(B^* + C^*) e^{-2iz_0^*\varphi} & -A^* \\ A & (B + C)\, e^{2iz_0\varphi} & -i\omega & 0 \\ -(B - C)\, e^{-2iz_0\varphi} & -A & 0 & -i\omega \end{vmatrix} = 0 \quad (44)$$

festgelegt. Die Ausrechnung der Determinante liefert mit Rücksicht auf

$$z_0 - z_0^* = ih \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

(vgl. Gl. (37)) und mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} p &= (|B|^2 + |C|^2) \operatorname{Cos} 2h\varphi - (B^* C + B C^*) \operatorname{Sin} 2h\varphi - |A|^2 \\ q &= |B^2 - A^2 - C^2| \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

die Bestimmungsgleichung

$$\omega^4 - 2p\omega^2 + q^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

für $\omega$. Hieraus folgt

$$\omega^2 = p \pm \sqrt{p^2 - q^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48).$$

Dabei ist nach den Gl. (46) $p$ reell und $q$ positiv reell.

Stabilität liegt vor, wenn $\omega$ reell oder, was dasselbe ist,

$\omega^2$ positiv reell

ist. Damit $\omega^2$ reell ist, muß $p^2 - q^2 > 0$ gelten; damit $\omega^2$ für beide Vorzeichen vor der Wurzel positiv ist, muß außerdem $p > 0$ sein. Wir werden beweisen, daß

$$p - q > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49),$$

woraus die beiden vorgenannten Ungleichungen folgen.

[3]) Nach Gl. (24) entspricht $\varphi = 0$ einer Störung der Wellenlänge $2l$, bei der die Verschiebungen benachbarter Wirbel entgegengesetzt gleich sind. Diese Störung wird gelegentlich als „alternative Störung" bezeichnet; vgl. die erste der beiden Arbeiten von Bl. Dolaptschiew, Z. angew. Math. Mech. Bd. 17 (1937), S. 313; Bd. 18 (1938), S. 263.

[4]) d. h. beliebiger Wellenlänge.

**2. Beweis der Ungleichung (49).** In die Ausdrücke für $A$, $B$ und $C$ von Gl. (27) führen wir die Größen $d$ und $h$ gemäß Gl. (37) ein. Dabei benutzen wir die Formeln (39) und die Stabilitätsbedingung (41). Wir erhalten zunächst

$$\left.\begin{aligned} \sin 2\pi z_0 &= \operatorname{Sin} h\pi\,(\operatorname{Cos} h\pi + i\cos d\pi) \\ \cos 2\pi z_0 &= \cos d\pi\ \operatorname{Cos} h\pi - i\operatorname{Sin}^2 h\pi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

und nach einiger Rechnung

$$\left.\begin{aligned} A &= -\frac{\pi^2 \cos d\pi \operatorname{Cos} h\pi}{2\operatorname{Sin}^2 h\pi} - \frac{i\varphi^2}{2} \\ B &= \frac{\pi^2}{2\operatorname{Sin}^2 h\pi} \\ C &= \frac{\pi\varphi}{2\operatorname{Sin} h\pi}(\operatorname{Cos} h\pi - i\cos d\pi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (51).$$

Zur Berechnung von $p$ und $q$ bilden wir unter wiederholter Anwendung von (39) und (41) die folgenden zusammengesetzten Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} |B|^2 + |C|^2 &= \frac{\pi^4}{4\operatorname{Sin}^4 h\pi} + \frac{\pi^2\varphi^2}{2\operatorname{Sin}^2 h\pi} \\ B^*C + BC^* &= \frac{\pi^3\varphi \operatorname{Cos} h\pi}{2\operatorname{Sin}^3 h\pi} \\ |A|^2 &= \frac{\pi^4}{4\operatorname{Sin}^4 h\pi} - \frac{\pi^4 - \varphi^4}{4} \\ B^2 - A^2 - C^2 &= \frac{(\pi^2 - \varphi^2)^2}{4} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (52).$$

Setzen wir diese in die Gln. (46) ein, so bekommt die zu beweisende Ungleichung $p - q > 0$ die Gestalt

$$\left(\frac{\pi^4}{4\operatorname{Sin}^4 h\pi} + \frac{\pi^2\varphi^2}{2\operatorname{Sin}^2 h\pi}\right)\operatorname{Cos} 2h\varphi - \frac{\pi^3\varphi \operatorname{Cos} h\pi}{2\operatorname{Sin}^3 h\pi}\cdot \operatorname{Sin} 2h\varphi - \frac{\pi^4}{4\operatorname{Sin}^4 h\pi} + \frac{\varphi^2(\pi^2 - \varphi^2)}{2} > 0 \quad (53).$$

Um einzusehen, daß (53) erfüllt ist, nehmen wir eine Reihe von Umformungen vor. Multiplikation mit $2h^4\operatorname{Sin}^4 h\pi$ und Einführung der Abkürzungen $h\pi = \mu$, $h\varphi = x$ liefert

$$\left(\frac{\mu^4}{2} + \mu^2 x^2 \operatorname{Sin}^2\mu\right)\operatorname{Cos} 2x - \mu^3 x \operatorname{Sin}\mu \operatorname{Cos}\mu \operatorname{Sin} 2x - \frac{\mu^4}{2} + x^2(\mu^2 - x^2)\operatorname{Sin}^4\mu > 0 \quad . \quad (54).$$

Unter Benutzung von (39) und der Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Cos} 2x &= \operatorname{Sin}^2 x + \operatorname{Cos}^2 x \\ \operatorname{Sin} 2x &= 2\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

erhalten wir für die einzelnen Bestandteile der linken Seite von (54), und zwar der Reihe nach für die Glieder mit $\mu^4, \mu^3 x, \mu^2 x^2$ und $x^4$,

$$\begin{aligned} &\mu^4 \operatorname{Sin}^2 x = \mu^4 \operatorname{Sin}^2 x\,(\operatorname{Cos}^2 x - \operatorname{Sin}^2 x), \\ &-2\mu^3 x \operatorname{Sin}\mu \operatorname{Cos}\mu \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x, \\ &\mu^2 x^2 \operatorname{Sin}^2\mu\,(\operatorname{Cos}^2\mu + 2\operatorname{Sin}^2 x) \text{ und} \\ &-x^4 \operatorname{Sin}^4\mu. \end{aligned}$$

Durch geeignete Zusammenfassung dieser Bestandteile ergibt sich für die Ungleichung (54)

$$\left.\begin{aligned} &\mu^2(\mu^2 \operatorname{Cos}^2 x \operatorname{Sin}^2 x - 2\mu x \operatorname{Cos} x \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos}\mu \operatorname{Sin}\mu + x^2 \operatorname{Cos}^2\mu \operatorname{Sin}^2\mu) \\ &-(\mu^4 \operatorname{Sin}^4 x - 2\mu^2 x^2 \operatorname{Sin}^2 x \operatorname{Sin}^2\mu + x^4 \operatorname{Sin}^4\mu) > 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (56)$$

oder mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} P &= \mu(x \operatorname{Cos}\mu \operatorname{Sin}\mu - \mu \operatorname{Cos} x \operatorname{Sin} x) \\ Q &= x^2 \operatorname{Sin}^2\mu - \mu^2 \operatorname{Sin}^2 x \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (57),$$

kurz

$$P^2 - Q^2 > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58).$$

Die Ungleichung ist zu beweisen für alle $x$-Werte zwischen $-\mu$ und $\mu$, entsprechend dem Wertebereich $-\pi < \varphi < \pi$ von $\varphi$. Da $P^2 - Q^2$ eine gerade Funktion von $x$ ist, genügt es jedoch, sich auf den Wertebereich $0 < x < \mu$ für $x$ zu beschränken, was im folgenden geschehen soll.

Wir überzeugen uns zunächst davon, daß unter dieser Beschränkung $P$ und $Q$ positiv sind. $Q > 0$ ist gleichbedeutend mit

$$\frac{\operatorname{Sin}\mu}{\mu} > \frac{\operatorname{Sin}x}{x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (59)$$

und daher erfüllt. Für $P$ gilt zunächst

$$P > \mu \operatorname{Cos}\mu\,(x \operatorname{Sin}\mu - \mu \operatorname{Sin}x),$$

woraus wieder wegen (59) $P > 0$ folgt.

Wegen $P > 0$, $Q > 0$ genügt es, statt (58) die einfachere Ungleichung

$$R(x) = P - Q > 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (60)$$

zu beweisen. Den Beweis führen wir für $0 < x < \mu$, indem wir zeigen, daß $R(x)$ in den Randpunkten $x = 0$ und $x = \mu$ verschwindet und dazwischen überall negative Krümmung besitzt (vgl. Bild 6). Wir haben

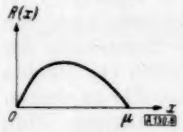


Bild 6. Hilfsfigur zum Stabilitätsbeweis.

$$R(x) = \mu\,(x \operatorname{Cos}\mu \operatorname{Sin}\mu - \mu \operatorname{Cos}x \operatorname{Sin}x) - x^2 \operatorname{Sin}^2\mu + \mu^2 \operatorname{Sin}^2 x \quad (61)$$

und ersichtlich

$$R(0) = R(\mu) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (62).$$

Weiter gilt

$$\left.\begin{aligned} R''(x) &= -4\mu^2 \operatorname{Cos}x \operatorname{Sin}x - 2\operatorname{Sin}^2\mu + 2\mu^2(\operatorname{Cos}^2 x + \operatorname{Sin}^2 x) \\ &= 2\mu^2(\operatorname{Cos}x - \operatorname{Sin}x)^2 - 2\operatorname{Sin}^2\mu \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (63)$$

und wegen

$$\mu\,(\operatorname{Cos}x - \operatorname{Sin}x) < \mu < \operatorname{Sin}\mu$$

ist schließlich

$$R''(x) < 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (64),$$

womit die negative Krümmung bewiesen ist.

Es bleibt noch übrig, etwas über die beiden Grenzfälle $x = 0$, $\varphi = 0$ und $x = \mu$, $\varphi = \pi$ zu sagen. Der erste, $\varphi = 0$, wurde schon in § 2 behandelt. Eine Störung mit $\varphi = \pi$ bedeutet (vgl. Gl. (24)) eine für alle Wirbel einer Reihe gleichmäßige Verschiebung. Einer solchen Störung gegenüber ist die Wirbelstraße indifferent; denn durch die Verschiebung entsteht einfach eine neue Wirbelstraße mit etwas geänderten Abmessungen.

## § 4. Zusammenfassung und Schlußbemerkungen.

In der vorliegenden Arbeit ist erstens gezeigt worden, daß sich der Stabilitätsbeweis für die Kármánsche Wirbelstraße unter Benutzung funktionentheoretischer Methoden führen läßt. Zweitens hat sich ergeben, daß die Kármánsche Wirbelstraße nur einen Sonderfall einer Schar ähnlicher stabiler Wirbelanordnungen darstellt.

Die andere Frage, ob die eingeführten Wirbelstraßen allgemeinerer Art wirklich auftreten können, wenn ein Körper von einer Flüssigkeit umströmt wird, ließe sich nur experimentell entscheiden. Vom theoretischen Standpunkte kann man hierzu sagen, daß aus Symmetriegründen notwendig ein unsymmetrischer oder schräg gestellter Körper erforderlich wäre. Die Wirbelstraße würde sich nicht wie im Kármánschen Falle gerade, sondern schräg hinter dem Hindernis ausbilden, d. h. sie würde gegen die Richtung der Flüssigkeitsströmung geneigt sein (vgl. Bild 7).

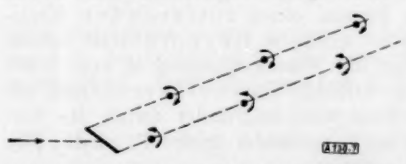


Bild 7. Schematische Darstellung der Ausbildung einer Wirbelstraße allgemeiner Anordnung bei der Umströmung eines schräg gestellten Hindernisses. Die Wirbelstraße ist gegen die Anströmungsrichtung geneigt.

Die Bedeutung der Kármánschen Untersuchungen (a. a. O.) besteht neben den Stabilitätsbetrachtungen in der Berechnung des Widerstandes, den ein durch eine Flüssigkeit bewegter Körper erfährt, in dessen Nachlauf sich eine Wirbelstraße ausgebildet hat. Die Rechnungen lassen sich ohne Schwierigkeit auf den von uns betrachteten allgemeineren Fall der Wirbelstraße übertragen. Wir gehen hierauf jedoch nicht ein, weil die Rechnungen methodisch nichts Neues bieten. Wir erwähnen nur, daß wegen der unsymmetrischen Verhältnisse zu der Widerstandskraft eine quer zur Körperbewegung gerichtete Auftriebskraft hinzutritt.

# Über den Einfluß der Wandkrümmung auf die Entstehung der Turbulenz.

Von *H. Görtler* in Göttingen.

(Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

**1. Einleitung.** Die im folgenden darzulegende Untersuchung reiht sich ein unter jene Arbeiten, welche die Entstehung der Turbulenz mittels der Methode der kleinen Schwingungen untersuchen. Gerade diese Methode hat nach anfänglichen negativen Ergebnissen gute Erfolge gezeitigt, als man daranging, die Zähigkeit und die Krümmung des Geschwindigkeitsprofils der Hauptströmung in richtiger Weise zu berücksichtigen.

Diese erfolgreichen Untersuchungen setzten im Jahre 1921 ein (Jenaer Vortrag von L. Prandtl [3][1]), erschienen in demselben Band 1 der ZAMM, in welchem F. Noether [2] in einem zusammenfassenden Bericht über das Turbulenzproblem zu dem Schlusse kam, daß die Methode der kleinen Schwingungen „zu keinem Ergebnis hinsichtlich der Entstehung der Turbulenz geführt" habe). Die Göttinger Dissertation von O. Tietjens (1922) [4] brachte unter Vernachlässigung der Reibung den Nachweis, daß laminare Grenzschichtprofile an ebenen Wänden gegenüber kleinen Störungen stabil sind, solange sie konvex sind, dagegen labil, wenn sie eine Einbuchtung besitzen. Dabei wurde jedoch nach dem Vorgange von Lord Rayleigh [1] das Geschwindigkeitsprofil durch einen Polygonzug ersetzt. Als man in erster Näherung die Reibung berücksichtigte, erhielt man das unerwartete und befremdende Resultat, daß alle Profile angefachte Schwingungen ergaben. Die Annäherung des stetig gekrümmten Profils der Grundströmung durch ein Streckenprofil mußte also als zu starker Eingriff in die vorliegenden Verhältnisse betrachtet werden.

W. Tollmien [5] führte die Rechnungen für die Grenzschichtströmung an der ebenen Wand erstmalig unter Berücksichtigung der Krümmung des Geschwindigkeitsprofils durch. Er gelangte zu einer kritischen Reynoldsschen Zahl, welche in befriedigender Weise mit den Beobachtungen übereinstimmte. Die Störungswellenlängen, welche sich bei der Rechnung ergaben, waren jedoch zu groß — sie betrugen etwa die 30fache Verdrängungsdicke der Grenzschicht — als daß man von einer eigentlichen Turbulenz sprechen konnte. Das solche langwelligen Schwingungen aber Anlaß zur Turbulenzentstehung geben konnten, zeigten schon die erheblichen Anfachungen, welche Schlichting [8] für das instabile Gebiet berechnete. Nun war durch die Tietjensschen Rechnungen der Hinweis gegeben, daß Geschwindigkeitsprofile mit Wendepunkt — wie sie u. a. etwa durch solche langwelligen Schwingungen entstehen können — instabil sein werden. Tollmien [10] gelang unter Berücksichtigung der Profilkrümmung der Beweis, daß in der Tat solche Wendepunktprofile an ebenen Wänden (oder zwischen parallelen ebenen Wänden) instabil sind, und zwar setzt hier eine ganz andere wesentlich kräftigere Instabilität als die obige ein mit kurzwelligen Störungen nach Art einer echten Turbulenz. Bei diesen letzteren Rechnungen wurde der Reibungseinfluß vernachlässigt. An den errechneten kräftigen Instabilitäten dürfte jedoch eine geringe Zähigkeit keine wesentliche Änderung bringen.

Unter den weiteren Arbeiten — einen zusammenfassenden Bericht gab Schlichting 1934 [9] — interessiert uns hier noch eine Stabilitätsuntersuchung an gekrümmten Wänden (Schlichting [7]), in welcher für die Strömung im Innern eines rotierenden Kreiszylinders nach denselben Methoden wie an ebenen Wänden kritische Reynoldssche Zahlen berechnet wurden. Man hat einen stabilisierenden Einfluß der Wandkrümmung in dem Sinne zu erwarten, daß die mit der Grenzschichtdicke gebildete kritische Reynoldssche Zahl ansteigt mit zunehmender Wandkrümmung. Diese Erwartung wird begründet durch die Vorstellung, welche man mit dem Einfluß der Zentrifugalkraft verbindet (siehe Prandtl [6]). Sie wurde durch die Schlichtingschen Rechnungen bestätigt.

In der vorliegenden Arbeit sollen Grenzschichtströmungen an schwach gekrümmten ruhenden Wänden untersucht werden. Unsere Betrachtungen zielen darauf hin, das dem obengenannten Tollmienschen Kriterium der Instabilität einer Grenzschichtströmung an einer ebenen Wand entsprechende Kriterium für gekrümmte Wände zu gewinnen. Es werden wie bei allen obengenannten Arbeiten nur zweidimensionale Störungen betrachtet. Eine Untersuchung des Einflusses der Wandkrümmung auf die Entstehung der Turbulenz hat praktisches Interesse im Hinblick auf die Formgebung von Strömungskörpern.

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Schriftenverzeichnis am Schluß der Arbeit.

**2. Die Störungsgleichung.** Als ungestörte zweidimensionale Strömung, deren Stabilität gegenüber Störungen in Gestalt von kleinen ebenfalls zweidimensionalen Schwingungen untersucht werden soll, wird eine Grenzschichtströmung an einer schwach gekrümmten Wand vom festen Krümmungsradius $R$ angenommen (Bild 1). $R$ wird positiv bei konvexer, negativ bei konkaver Wand gesetzt. Mit $U(y)$ wird die Geschwindigkeitsverteilung dieser Strömung dargestellt, wobei $y$ die Koordinate senkrecht zur Wand bezeichnet. Veränderungen der Grundströmung $U$ mit der in Strömungsrichtung weisenden Koordinate $x$ (= Bogenlänge der Wand) werden dabei als vernachlässigbar klein im zugrunde liegenden Bereich von $x$ vorausgesetzt. Ferner wird vorausgesetzt, daß sich $U$ zeitlich sehr langsam im Vergleich mit den in Betracht zu ziehenden Störungsschwingungen verändern soll. Im übrigen wird das Grenzschichtprofil $U(y)$ in üblicher Weise noch insofern idealisiert, als an Stelle des asymptotischen Übergangs in die äußere Strömung ein Anstieg von $U=0$ an der Wand ($y=0$) bis zu einem Werte $U_\delta$ bei einem bestimmten $y=\delta=$ „Grenzschichtdicke“ angenommen wird. Außerhalb dieser wandnahen Schicht nehmen wir — vorwiegend aus später ersichtlichen Gründen der rechnerischen Annehmlichkeit (s. Gl. (2,4) und (2,5)) und in Übereinstimmung mit Schlichting [7] S. 166 — an, daß sich die Strömung wie die starre Rotation $U=\text{const}\,\frac{R+y}{R}$ um den Kreiszylinder verhält; damit ist der Einfluß der Wandkrümmung auf die äußere Strömung näherungsweise berücksichtigt.

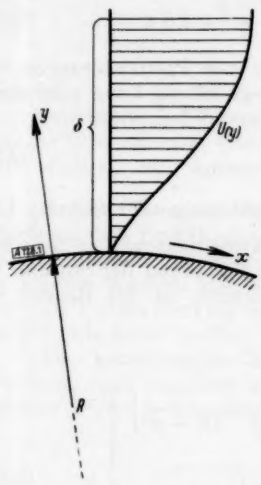


Bild 1.

In nicht zu großen Abständen $y \gtrsim \delta$ ist $U$ wegen des voraussetzungsgemäß großen Wertes von $R\,(\gg y)$ praktisch konstant. Wir könnten daher die obige Korrektur für eine erste Näherung unterlassen und auch im weiteren Verlauf der Rechnung Glieder der Größenordnung $\frac{\delta}{R}$ gegen 1 vernachlässigen. Da jedoch der nachzuweisende Einfluß der Wandkrümmung auf das Verhalten der zu untersuchenden zweidimensionalen Schwingungen von eben dieser kleinen Ordnung ist, wollen wir, um allen Einwänden zu begegnen, grundsätzlich nur Glieder der Ordnung $\left(\frac{\delta}{R}\right)^2$ streichen.

Bei der angegebenen Koordinatenwahl lauten die Navier-Stokesschen Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung in völliger Strenge:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{R}{R+y}u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{uv}{R+y}=-\frac{1}{\varrho}\frac{R}{R+y}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left\{\Delta u+\frac{2R}{(R+y)^2}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{u}{(R+y)^2}\right\}\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{R}{R+y}u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{u^2}{R+y}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left\{\Delta v-\frac{2R}{(R+y)^2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{v}{(R+y)^2}\right\}\\
&\frac{R}{R+y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{v}{R+y}=0
\end{aligned}\right\}\quad(2{,}1).$$

Darin bezeichnen $u$ und $v$ die Geschwindigkeitskomponenten in $x$- bzw. $y$-Richtung, $p$ den Druck, $\varrho$ die Dichte und $\nu$ die kinematische Zähigkeit. Wir haben uns ferner auf $y \gtrsim 0$ zu beschränken. Schließlich wird in (2,1) durch $\Delta$ der Differentialoperator

$$\Delta=\frac{R^2}{(R+y)^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{R+y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}$$

bezeichnet.

Der Kontinuität wird durch Einführung der Stromfunktion $\Psi$ vermöge

$$u=\frac{\partial\Psi}{\partial y},\qquad v=-\frac{R}{R+y}\frac{\partial\Psi}{\partial x}$$

genügt.

Der oben bezeichneten Grundströmung, welche die Stromfunktion $\psi_0(y)\left(U(y)=\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\right)$ haben möge, überlagern wir nun eine kleine zweidimensionale Schwingung mit der Stromfunktion $\psi(x,y,t)$. Da $U=U(y)$ selbst eine Lösung der hydrodynamischen Gleichungen sein

soll — wobei wir dann anzunehmen haben, daß die zeitliche Veränderung von $U$ so langsam gegen die zu betrachtenden kleinen Schwingungen stattfindet, daß wir sie vernachlässigen können —, erhält man nach Einsetzen von $\Psi = \psi_0 + \psi$ in (2,1) und Elimination des Druckes die bezüglich $\psi$ und ihren Ableitungen linearisierte Störungsgleichung

$$\frac{R+y}{R}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi + U\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x}\left\{U'' + \frac{U'}{R+y} - \frac{U}{(R+y)^2}\right\} = \frac{R+y}{R}\nu\,\Delta\Delta\psi \quad . \quad . \quad . \quad (2{,}2).$$

Man kann jede Störungsschwingung $\psi(x, y, t)$ aus einer Reihe von Partialstörungen in Fourierscher Weise aufbauen. Wegen der Linearität der Störungsgleichung kann man sich daher auf die Untersuchung eines Störungsgliedes der Gestalt

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y)\, e^{i(\alpha x - \beta t)} = \varphi(y)\, e^{i\alpha(x - ct)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2{,}3)$$

beschränken. Es wird $\alpha$ reell angenommen und $= \frac{2\pi}{\lambda}$, wo $\lambda$ die Wellenlänge der Störung bezeichnet. $\beta$ ist im allgemeinen komplex; der Realteil $\beta_r$ ist die Kreisfrequenz der Schwingung, während der Imaginärteil $\beta_i$ ein Maß für die Anfachung oder Dämpfung der Störung — je nachdem es größer oder kleiner als Null ist — darstellt. Schließlich ist der Realteil $c_r$ von $c$ die Phasengeschwindigkeit der Störung.

Durch Einsetzen von (2,3) in (2,2) ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}&\left(U - \frac{R+y}{R}c\right)\left\{\varphi'' + \frac{1}{R+y}\varphi' - \frac{\alpha^2 R^2}{(R+y)^2}\varphi\right\} - \varphi\left\{U'' + \frac{U'}{R+y} - \frac{U}{(R+y)^2}\right\}\\ &= -\frac{i\nu}{\alpha}\left\{\frac{R+y}{R}\varphi'''' + \frac{2}{R}\varphi''' + \left(2R\alpha^2 + \frac{1}{R}\right)\left(-\frac{\varphi''}{R+y} + \frac{\varphi'}{(R+y)^2}\right)\right.\\ &\qquad\left. + \frac{R\alpha^2}{(R+y)^3}(R^2\alpha^2 - 4)\varphi\right\}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (2{,}4).$$

Führen wir hier die Funktion $F(y)$ vermöge

$$U = \frac{R+y}{R}F(y)$$

ein, wonach also $F = \text{const}$ für $y \geq \delta$, multiplizieren (2,4) mit $\frac{R}{R+y}$ und entwickeln $\frac{1}{R+y}$, $\frac{1}{(R+y)^2}$, ... binomisch, so ergibt sich unter Vernachlässigung von Gliedern mit dem Faktor $\frac{1}{R^2}$ die Störungsgleichung[2])

$$\left.\begin{aligned}&(F-c)\left\{\varphi'' + \frac{1}{R}\varphi' - \alpha^2\left(1 - \frac{2y}{R}\right)\varphi\right\} - \varphi\left\{F''' + \frac{3}{R}F'\right\}\\ &= -\frac{i\nu}{\alpha}\left\{\varphi'''' + \frac{2}{R}\varphi''' - 2\alpha^2\left(1 - \frac{2y}{R}\right)\varphi'' + \frac{2\alpha^2}{R}\varphi' + \alpha^4\left(1 - \frac{4y}{R}\right)\varphi\right\}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (2{,}5).$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen, welche das Verschwinden der Störungskomponenten an der Wand und den glatten Anschluß in $y = \delta$ an die nach $y = \infty$ abklingende Lösung außerhalb der Grenzschicht zu fordern haben, liegt ein Eigenwertproblem vor: Bei vorgegebener Geschwindigkeitsverteilung $U(y)$ und Zähigkeit $\nu$ oder auch Reynoldsscher Zahl der Grundströmung ist zu einer bestimmten Störungswellenlänge (Parameter $\alpha$) der Wert von $c$ und damit der Anfachung bzw. Dämpfung $\beta_i$ zu ermitteln.

Für Flüssigkeiten kleiner Reibung kann man die rechte Seite von (2,5) vernachlässigen. Im Hinblick auf das Turbulenzproblem interessieren nur höhere Reynoldssche Zahlen. Wir werden daher in der vorliegenden Untersuchung — im Einklang mit Tollmien [10], an dessen Ausführungen sich unsere Betrachtungen unmittelbar anschließen — die Reibung vernachlässigen und sie nur dort, wo sie die Eindeutigkeit einer zu treffenden Bestimmung in der reibungslosen Rechnung entscheidet, heranziehen (siehe unten, Abschnitt 4).

Unseren Betrachtungen liegt somit endgültig die Störungsgleichung

$$\varphi'' + \frac{1}{R}\varphi' - \alpha^2\left(1 - \frac{2y}{R}\right)\varphi - \frac{F'' + \frac{3}{R}F'}{F - c}\varphi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2{,}6)$$

[2]) Mit etwas anderer Koordinatenwahl siehe auch Schlichting [7] S. 166. Im weiteren gehen aber die Schlichtingschen Vernachlässigungen über die unseren hinaus, da man es dort mit kleinen $\alpha$-Werten, also mit langwelligen Störungen zu tun hat.

zugrunde. Wir werden später mehrfach die durch

$$\varphi = e^{\frac{-y}{2R}} \chi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2{,}7)$$

definierte Hilfsfunktion $\chi$ heranziehen, für welche nach (2,6) die Differentialgleichung

$$\chi'' - \alpha^2 \left(1 - \frac{2y}{R}\right)\chi - \frac{F'' + \frac{3}{R}F'}{F - c}\chi = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2{,}8)$$

besteht.

Zur Störungsdifferentialgleichung (2,6) bzw. (2,8) sei hier noch bemerkt, daß sie im Gegensatz zu (2,5) nur von der 2. Ordnung ist. Es können daher nur zwei Randbedingungen erfüllt werden. Wir kommen im Abschnitt 4 darauf zurück.

**3. Das Lösungssystem und die Randbedingungen im reibungslosen Fall.** Die Differentialgleichung (2,6) besitzt eine singuläre Stelle der Bestimmtheit dort, wo $F = c$ wird, wenn diese Stelle innerhalb der Grenzschicht liegt. Daß letzteres in der Tat für neutrale Lösungen $\beta_i = 0$ an ebenen Wänden der Fall ist, ist ein auf Rayleigh zurückgehender Satz (siehe hierzu den von Tollmien [10], S. 90 angegebenen kurzen Beweis). Für schwach gekrümmte Wände ändert sich daran nichts.

Die konvergenten Reihenentwicklungen eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung (2,6) um diese kritische Stelle, die mit $y = y_c$ bezeichnet werden möge, sind in bekannter Weise herzustellen und werden durch

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= (y - y_c) \sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_\varkappa (y - y_c)^\varkappa, \\ \varphi_2 &= \sum_{\varkappa=0}^{\infty} b_\varkappa (y - y_c)^\varkappa + \left(\frac{F''_c}{F'_c} + \frac{3}{R}\right) \cdot \varphi_1 (y - y_c) \cdot \ln (y - y_c) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3{,}1)$$

gegeben. In (3,1) ist $a_0 = b_0 = 1$ und der Index $c$ weist auf den Wert der betreffenden Funktion an der Stelle $y = y_c$ hin. Es werde hier ferner festgelegt, daß $\ln (y - y_c)$ für positive reelle $y - y_c$ reell sei.

Zur Herstellung der Randbedingung bei $y = \delta$ benötigen wir die Lösung der Differentialgleichung (2,6) bzw. (2,8) außerhalb der Grenzschicht, von der wir zu fordern haben, daß sie nach außen abklingt. Betrachten wir dazu die letztere Differentialgleichung, welche für $y \geqq \delta$ die Gestalt

$$\chi'' - \alpha^2 \left(1 - \frac{2y}{R}\right)\chi = 0$$

annimmt, so ist eine Näherungslösung[3]), welche der Differentialgleichung bis auf Glieder der Ordnung $0\left(\frac{\delta^2}{R^2}\right)$ genügt, solange noch $y \ll R$ ist, durch

$$\chi = \text{Const}\, e^{-\alpha y} \left\{1 + \frac{y}{2R} + \frac{\alpha y^2}{2R}\right\}$$

gegeben. Man hat somit folgende Randbedingungen an die Lösung innerhalb der Grenzschicht zu stellen:

$$\left.\begin{aligned} &\chi(0) = 0, \qquad \chi'(\delta) + \left\{\alpha\left(1 - \frac{\delta}{R}\right) - \frac{1}{2R}\right\} \cdot \chi(\delta) = 0 \\ &\text{bzw. } \varphi(0) = 0, \qquad \varphi'(\delta) + \alpha\left(1 - \frac{\delta}{R}\right) \cdot \varphi(\delta) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (3{,}2).$$

Die jeweils letztere Randbedingung gewährleistet den stetigen Anschluß mit stetiger Tangente bei $y = \delta$.

**4. Der Einfluß der Reibung.** Bei der Darlegung des Reibungseinflusses können wir uns kurz fassen, da bereits Schlichting [7], S. 171 ff. in Übertragung der Tollmienschen Betrachtung [5], S. 26 ff. (siehe auch [10] S. 83 ff.) an ebenen Wänden auf die Strömung in rotie-

[3]) Man erhält sie, indem man zunächst unter Vernachlässigung des Gliedes $\alpha^2 \frac{2y}{R}\chi$ löst und dann durch Iteration einmal verbessert. Übrigens kann man auch die exakte Lösung angeben, welche sich mittels einer Hankelschen Funktion darstellen läßt.

renden Zylindern die notwendigen Feststellungen gemacht hat, deren Gültigkeit sich unmittelbar auf unseren Fall übertragen läßt.

Man kann sich auf die Berücksichtigung der Reibungswirkung in einem kleinen Streifen von der Größenordnung $(a\,Re\,F''_c)^{-\frac{1}{3}}$ beschränken $\left(Re=\frac{U(\delta)\,\delta}{\nu}\right)$. Neben der den Erwartungen entsprechend sich ergebenden Abflachung der Störung $-\varphi_2$ in (3,1) bleibt dann in $y=y_c$ endlich, so daß die Anwendung der Methode der kleinen Schwingungen ihre Rechtmäßigkeit bewahrt — ergibt sich ein Phasensprung in den Störungen, der auch im Grenzfall verschwindender Reibung bestehen bleibt. Es ergibt sich nämlich für neutrale Schwingungen, daß unter den Zweigen des Logarithmus in (3,1) allein die Fortsetzung auf dem Wege von positiv reellen $y-y_c$ durch die untere komplexe Halbebene zu negativen $y-y_c$ physikalisch möglich ist. Für positive $y-y_c$ ist

$$\varphi_2=1+\cdots+\left(\frac{F''_c}{F'_c}+\frac{3}{R}\right)\varphi_1(y-y_c)\ln(y-y_c) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4{,}1\,a)$$

und somit für negative $y-y_c$

$$\varphi_2=1+\cdots+\left(\frac{F''_c}{F'_c}+\frac{3}{R}\right)\varphi_1(y-y_c)\{\ln|y-y_c|-i\,\pi\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4{,}1\,b).$$

Dieselbe Übergangssubstitution gilt auch für angefachte Schwingungen ($c_i>0$), während für gedämpfte Schwingungen $-i\,\pi$ durch $+i\,\pi$ zu ersetzen ist.

Es sei noch bemerkt, daß man bei Berücksichtigung der Reibung neben den in dem genannten und bei großen Reynoldsschen Zahlen sehr engen Streifen um $y=y_c$ der Grenzschicht korrigierten Lösungen (3,1) zwei weitere linear unabhängige Lösungen für das Fundamentalsystem der vollständigen Differentialgleichung 4. Ordnung erhält. Sie sind ebenfalls von Tollmien und Schlichting a. a. O. untersucht worden. Wir können uns daher auf wenige Bemerkungen beschränken. Während die eine der beiden hinzukommenden Lösungen mit wachsenden $y$-Werten sehr rasch über alle Grenzen wächst und daher ausscheidet, klingt die andere sehr rasch ab in einer Grenzschicht zweiter Ordnung in der gegebenen Grenzschicht. Der Einfluß der Wandkrümmung auf diese beiden Lösungen ist sehr gering im Vergleich zu dem Einfluß auf $\varphi_1$ und $\varphi_2$. Unter Hinzunahme der rasch abklingenden Lösung könnte man noch die weitere Randbedingung, daß auch die Tangentialkomponente der Störung an der Wand verschwindet, erfüllen. Die genannte Lösung hat aber ihrem ganzen Charakter gemäß nur geringen Einfluß auf den Störungsverlauf. Wir können daher für hinreichend große Reynoldssche Zahlen auf eine über die obengenannte Übergangssubstitution hinausgehende Berücksichtigung der Reibung verzichten. Es entfällt damit natürlich die Möglichkeit der Bestimmung einer kritischen Reynoldsschen Zahl; letzteres wird auch nicht die Aufgabe dieser Untersuchung sein. Wir verfahren damit in Übereinstimmung mit den Tollmienschen Untersuchungen zum Beweise des einleitend genannten Stabilitätskriteriums mit dem Ziele, den Einfluß der Wandkrümmung auf die Stabilität einer vorgegebenen Grenzschichtströmung festzustellen.

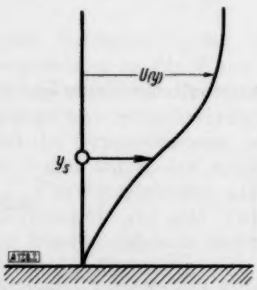


Bild 2. $U''(y_s)=0$.

**5. Eine notwendige Bedingung für die Existenz angefachter Schwingungen.** Bereits Lord Rayleigh [1a], S. 486, hat für den Fall der Strömung an ebenen Wänden nachgewiesen, daß angefachte Störungen nur dann existieren können, wenn das Grenzschichtprofil einen Wendepunkt $y=y_s$ hat (Bild 2), d. h. es muß notwendig für ein $y=y_s$ die Größe $U''(y_s)$ verschwinden (siehe hierzu auch Tollmien [10], S. 88 f.).

In Verallgemeinerung dieser Bedingung beweisen wir für den Fall schwach gekrümmter Wände folgenden Satz: Notwendig für die Existenz angefachter Schwingungen ist ein Vorzeichenwechsel von

$$U''+\frac{1}{R}\,U' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5{,}1).$$

Zum Beweise ziehen wir die Hilfsfunktion $\chi$ heran. Mit

$$\left.\begin{aligned} L[\chi]&=\chi''-\alpha^2\left(1-\frac{2\,y}{R}\right)\chi-\frac{1}{F-c}\left\{F''+\frac{3}{R}\,F'\right\}\chi=0\\ \overline{L[\chi]}&=\bar\chi''-\alpha^2\left(1-\frac{2\,y}{R}\right)\bar\chi-\frac{1}{F-\bar c}\left\{F''+\frac{3}{R}\,F'\right\}\bar\chi=0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5{,}2),$$

worin der Querstrich die konjugiert komplexen Größen bezeichnet, ist für komplexe Werte von $c$ — es befindet sich dann keine Singularität auf der reellen Achse der komplexen $y$-Ebene — unter Berücksichtigung der homogenen Randbedingungen

$$\int_0^\delta \{\bar{\chi}\, L[\chi] - \chi\, \overline{L[\chi]}\}\, dy = -2i c_i \int_0^\delta \frac{\left(F'' + \frac{3}{R} F'\right)}{|F-c|^2} \chi \bar{\chi}\, dy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5{,}3).$$

Es sind also in der Tat angefachte (und überhaupt nichtneutrale) Schwingungen ($c_i \neq 0$) nur dann möglich, wenn $F'' + \frac{3}{R} F'$ das Vorzeichen wechselt, womit wegen $F'' + \frac{3}{R} F' = \frac{R}{R+y}\left(U'' + \frac{1}{R} U'\right)$ für große $R$ der behauptete Satz bewiesen ist. Wir bezeichnen im weiteren jene Stelle, an welcher der Ausdruck (5,1) verschwindet, mit $y = y_0$ und versehen die zugehörigen Werte der auftretenden Funktionen mit dem Index 0.

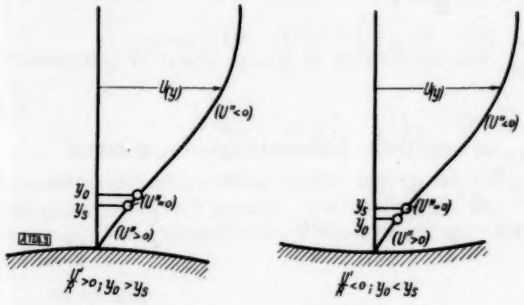



Bild 3. $U''(y_0) + \frac{1}{R} U'(y_0) = 0$.

An konvexen Wänden ($R > 0$) ist $y_0 > y_s$ ($y_s$ = Wendepunkt des Profils), an konkaven Wänden ($R < 0$) dagegen ist $y_0 < y_s$, wie aus der Diskussion des Ausdruckes (5,1) wegen $U'' \geqq 0$ für $0 \leqq y \leqq y_s$ und $U'' \leqq 0$ für $y_s \leqq y \leqq \delta$ folgt (Bild 3). Hierbei nehmen wir an, daß das Geschwindigkeitsprofil einen Wendepunkt besitzt. Es folgt aber auch, daß an konvexen Wänden bereits ein $y_0$ ohne Auftreten eines $y_s$ vorhanden sein kann, an konkaven Wänden dagegen nicht.

Grenzschichtprofile mit Wendepunkt sind nach der Grenzschichttheorie dadurch gekennzeichnet, daß in der betreffenden Strömung ein Anstieg des von der äußeren Strömung der Grenzschicht eingeprägten Druckes $p$ in Strömungsrichtung stattfindet. Es ist

$$\nu \left.\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right|_{y=0} = -\frac{1}{\varrho} \frac{dp}{dx}.$$

Auf Grund unserer obigen Betrachtungen können also angefachte Schwingungen an konvexen Wänden eventuell schon vor dem Druckminimum, an konkaven jedoch auf jeden Fall erst hinter dem Druckminimum auftreten. Der Nachweis, daß sie tatsächlich in den genannten Situationen auftreten, d. h. daß unsere obige Bedingung des Verschwindens von $U'' + \frac{1}{R} U'$ auch hinreichend für die Existenz angefachter Eigenschwingungen ist, wird die Aufgabe der weiteren Untersuchung sein.

Wir erinnern hier nochmals daran, daß bei unseren Rechnungen die Reibung vernachlässigt wird. Wie man von den Untersuchungen spezieller Geschwindigkeitsprofile an ebenen Wänden weiß, können dort manche Profile ohne Wendepunkt durch Anbringung einer Korrektur für die innere Reibung instabil werden. Es handelt sich aber bei den resultierenden Anfachungen auf Grund dieser kleinen Reibungskorrektur für große Reynoldssche Zahlen um eine wesentlich kleinere Größenordnung, als bei den für Wendepunktprofile in „reibungsloser" Rechnung von Tollmien aufgefundenen kräftigen Anfachungen. Wenn wir also hier von einer notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Existenz angefachter Schwingungen sprechen, so nur im Sinne der Existenz dieser kräftigen Instabilitäten und unter Außerachtlassung der obengenannten möglichen kleinen Anfachungen, die durch Berücksichtigung der Reibung für große Reynoldssche Zahlen bei speziellen unserer Bedingung nicht genügenden Profilen zu erhalten sind.

**6. Nachweis, daß ein Vorzeichenwechsel von $U'' + \frac{1}{R} U'$ auch hinreichend für die Existenz angefachter Eigenschwingungen ist.** Wir nehmen an, es liege ein Geschwindigkeitsprofil $U(y)$ vor, für das in einem Wandabstand $y = y_0$ ein Vorzeichenwechsel von $U'' + \frac{1}{R} U'$ stattfindet: $U''_0 + \frac{1}{R} U'_0 = 0$. Wir bestimmen für dieses Profil zunächst eine neutrale Eigenlösung unseres Eigenwertproblems ($\beta_i = 0$).

Dazu gehen wir aus von der Lösung

$$\varphi = U - U_0 = \frac{R+y}{R}(F - F_0), \qquad c = F_0, \qquad a = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6{,}1)$$

unserer Differentialgleichung, welche wir hier am einfachsten in der Gestalt der nullgesetzten linken Seite von (2,4) heranziehen; bei unserer Näherung bezüglich $R$ und bei den Parameterwerten $c = F_0$, $a = 0$ lautet sie:

$$(U - U_0)\left(\varphi'' + \frac{1}{R}\varphi'\right) - \varphi\left(U'' + \frac{1}{R}U'\right) = 0.$$

Die Lösung (6,1) genügt jedoch nicht den Randbedingungen.

Wesentlich ist nun folgende Feststellung: Die zu (6,1) gehörige Hilfsfunktion $\chi$:

$$\chi = e^{y/2R}(U - U_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6{,}2)$$

hat wegen

$$\chi'' = e^{y/2R}\left(U'' + \frac{1}{R}U'\right)$$

(bei Vernachlässigung von Gliedern $\sim U\frac{\delta^2}{R^2}$, wie vereinbart) in $y = y_0$ einen Wendepunkt:

$$\chi'' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6{,}3).$$

Die von der neutralen Eigenlösung $\chi_n$ zu erfüllende Differentialgleichung lautet

$$\chi''_n - a_n^2\left(1 - \frac{2y}{R}\right)\chi_n - \frac{F'' + \frac{3}{R}F'}{F - c}\chi_n = 0$$

mit den Randbedingungen

$$\chi_n(0) = 0, \qquad \chi'_n(\delta) + \left\{a\left(1 - \frac{\delta}{R}\right) - \frac{1}{2R}\right\}\chi_n(\delta) = 0.$$

Im Falle $c = F_0$ ist der in der Differentialgleichung auftretende Ausdruck $\dfrac{F'' + \frac{3}{R}F'}{F - F_0}$ für alle $y$-Werte in $0 \leq y \leq \delta$ eines Vorzeichens, nämlich negativ. Eine Singularität liegt nicht vor. Gehen wir daher von der Lösung (6,2) mit $a = 0$, $c = F_0$ aus und lassen in der Differentialgleichung $a$ anwachsen, so ändert sich die Lösung mit $a$ stetig und zwar so, daß bei Festhalten des Wertes $\chi(\delta)$ das Abfallen der Lösung nach dem Inneren der Grenzschicht bis zur Wand immer langsamer erfolgt (Bild 4). Hinzu kommt der im gleichen Sinne wirkende Einfluß des Parameters $a$ in der Randbedingung bei $y = \delta$. Zwar genügt die Ausgangslösung (6,2) bei $y = \delta$ nicht der vorgegebenen Randbedingung mit $a = 0$, jedoch ist die Abweichung wegen des voraussetzungsgemäß großen Wertes von $R$ gering — es ist für (6,2) $\chi'(\delta) - \dfrac{3}{2R}\chi(\delta) = 0$.

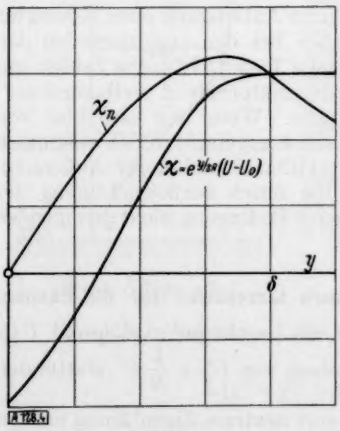



Bild 4.

Rückt man die Lösung zunächst so zurecht, daß sie mit $a = 0$ die Randbedingung bei $y = \delta$ erfüllt, und läßt dann $a$ wachsen unter Einhaltung der Randbedingung bei $y = \delta$, so muß der Nullpunkt der zugehörigen Lösung immer weiter nach der Wand zu wandern. Jene Lösung, für welche der Knotenpunkt in $y = 0$ fällt, erfüllt dann beide Randbedingungen, ist also eine Eigenlösung $\chi = \chi_n$, und zwar mit $c = c_n = F_0$. Dieser Existenzbeweis ist jedenfalls richtig, wenn $a_n \gg \dfrac{1}{R}$ ist wegen des obengenannten Fehlers in der Randbedingung, da sonst das Zurechtrücken der Lösung zur Erfüllung der Randbedingung bei $a = 0$ bereits die Wanderung des Knotenpunktes durch $y = 0$ erwirken könnte. Nun geht aber unsere neutrale Eigenlösung für $R \to \infty$ in die von Tollmien [10], S. 104 f. angegebene neutrale Eigenlösung an der ebenen Wand über. Bei dem von Tollmien angegebenen Beispiel [10], S. 110 f. ist $a_n \delta = 1{,}12$, und auch für endliche aber große $R$ wird es sich demnach um $a_n$-Werte $\gg \dfrac{1}{R}$ handeln.

Wir wollen nun prüfen, ob in der Nachbarschaft der nachgewiesenen neutralen Eigenlösung angefachte Eigenschwingungen existieren. Wir schlagen damit auch hier den von Tollmien für $R=\infty$ beschrittenen Weg ein und werden uns eng an seine Rechnungen anzuschließen haben. Mit der Feststellung angefachter Schwingungen für ein Profil mit Vorzeichenwechsel von $U''+\frac{1}{R}U'$ ist dann der Beweis erbracht, daß dieser Vorzeichenwechsel für die Existenz angefachter Schwingungen hinreichend ist.

Der Nachweis selbst ist etwas langwierig. Da es sich vielfach um eine wörtliche Wiederholung der Tollmienschen Rechnungen [10] handelt, werden wir uns kürzer fassen können, indem wir an gegebener Stelle einfach auf seine Ausführungen verweisen und uns somit lediglich auf eine Darlegung des Gedankenganges unter Berücksichtigung der Wandkrümmung beschränken.

Es sei $\chi_I$ eine zu unserer oben nachgewiesenen neutralen Eigenlösung $\chi_n$ mit $c_n=F_0$ benachbarte Lösung, welche die Randbedingung $\chi_I(0)=0$ erfüllt. Dann ist die Bedingung

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\delta \chi_I\, g\, dy=(a_n-a)\left(1-\frac{\delta}{R}\right)\chi_I(\delta)\,\chi_n(\delta)\\ \text{mit}\quad &g=(a^2-a_n^2)\left(1-\frac{2y}{R}\right)\chi_n+\left(F''+\frac{3}{R}F'\right)\left(\frac{1}{F-c}-\frac{1}{F-c_n}\right)\chi_n\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(6{,}4)$$

notwendig und hinreichend dafür, daß $\chi_I$ eine Eigenlösung ist, d. h., daß $\chi_I$ auch der Randbedingung bei $y=\delta$ genügt. Dabei gehören die Parameter $a_n$, $c_n=F_0$ zur neutralen Eigenlösung $\chi_n$, die Parameter $a$, $c$ zur Lösung $\chi_I$. Der Beweis ist wie bei Tollmien [10] zu erbringen.

Setzt man

$$c-F_0=\Delta c=\Delta c_r+i\,c_i,\qquad a^2-a_n^2=\Delta a^2,$$

so ist nach (6,4)

$$\Delta c\int_0^\delta\frac{\left(F''+\frac{3}{R}F'\right)}{(F-c)(F-F_0)}\chi_I\,\chi_n\,dy+\Delta a^2\int_0^\delta\left(1-\frac{2y}{R}\right)\chi_I\,\chi_n\,dy=(a_n-a)\left(1-\frac{\delta}{R}\right)\chi_I(\delta)\,\chi_n(\delta)\quad.\quad(6{,}5).$$

Entwickelt man zunächst $\chi_I$ und $\chi_n$ um die singuläre Stelle $y=y_c\,(F=c)$, wobei so normiert werde, daß $\chi_n(y_0)=1$, so wird wegen $y_c=y_0+\frac{\Delta c}{F'_c}$

$$\left.\begin{aligned}\chi_I&=1+k_1(y-y_c)+\left(\frac{F'''_c}{F'_c}+\frac{3}{R}\right)(y-y_0)\ln(y-y_c)+\cdots\\ \chi_n&=1+k\frac{\Delta c}{F'_c}+k(y-y_c)+\cdots\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(6{,}6)$$

(analog Tollmien [10], S. 102), wo $k$ und $k_1$ durch die Bedingungen an der Wand bestimmt werden und uns nicht weiter interessieren. Der Index $c$ verweist auf den Wert der Funktion bei $y=y_c$.

Man bestimmt nun zunächst den größten Beitrag des ersten Integrales von (6,5) in einem Intervall $-\varepsilon\le y-y_0\le\varepsilon$, wo $\varepsilon^2\ll\left|\frac{\Delta c}{F'_c}\right|$ aber $\varepsilon\gg\left|\frac{\Delta c}{F'_c}\right|$, also etwa $\varepsilon=\left|\frac{\Delta c}{F'_c}\right|^{3/4}$ unter Verwendung der Reihenentwicklungen (6,6) und unter Berücksichtigung der Übergangssubstitution (4,1). Wegen $\ln(-\varepsilon)=\ln(\varepsilon)-\pi i$ wird dieser Beitrag gleich

$$\left(\frac{F''_c}{F'_c}+\frac{3}{R}\right)\cdot\pi i+0(\varepsilon).$$

Nun ist, wenn man um $y_0$ entwickelt, wegen $y_c-y_0=\frac{\Delta c}{F'_c}$

$$\frac{F''_c}{F'_c}+\frac{3}{R}=\Delta c\left\{\frac{F'''_0}{F'^2_0}-\frac{F''^2_0}{F'^3_0}\right\}\quad\ldots\quad(6{,}7).$$

Unsere Integralbedingung liefert also:

$$E\cdot\Delta c+\left(\frac{F'''_0}{F'^2_0}-\frac{F''^2_0}{F'^3_0}\right)\cdot\Delta c\cdot\pi i+\Delta a^2\int_0^\delta\left(1-\frac{2y}{R}\right)\chi_1\chi_n\,dy=(a_n-a)\left(1-\frac{\delta}{R}\right)\chi_1(\delta)\,\chi_n(\delta)$$

mit

$$E=\left\{\int_0^{y_0-\varepsilon}+\int_{y_0+\varepsilon}^{\delta}\right\}\frac{F''+\frac{3}{R}F'}{(F-c)(F-F_0)}\,dy \qquad (6{,}8)$$

Durch Spaltung in Real- und Imaginärteil ergibt sich für $E\neq 0$

$$c_i=-\frac{\pi}{E}\left(\frac{F'''_0}{F'^2_0}-\frac{F''^2_0}{F'^3_0}\right)\Delta c_r \qquad (6{,}9)$$

und

$$\Delta c_r\left\{1+\left(\frac{F'''_0}{F'^2_0}-\frac{F''^2_0}{F'^3_0}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{E^2}\right\}=-\frac{\Delta a^2}{E}\int_0^\delta\left(1-\frac{2y}{R}\right)\chi_1\chi_n\,dy-\frac{\Delta a^2}{a+a_n}\left(1-\frac{\delta}{R}\right)\chi_1(\delta)\,\chi_n(\delta) \qquad (6{,}10)$$

Für hinreichend kleine $|\Delta a^2|$ und $|\Delta c|$ kann man hierin $\chi_1$ in erster Näherung durch $\chi_n$ ersetzen. Wegen $F''+\frac{3}{R}F'\gtrless 0$ für $y\lesseqgtr y_0$ ist der aus der Entwicklung (6,7) hervorgegangene Ausdruck $\frac{F'''_0}{F'^2_0}-\frac{F''^2_0}{F'^3_0}$ negativ. Ist also etwa $E<0$ (wie in einem von Tollmien für $\frac{1}{R}=0$ angegebenen Beispiel), so ist $c_i$ positiv, wenn $\Delta c_r<0$, was durch $\Delta a^2<0$ widerspruchslos erfüllbar ist. Ebenfalls ist für $E>0$ ein positives $c_i$ zu erzielen, wenn $\Delta c_r>0$, also wieder $\Delta a^2<0$. Auch für $E=0$, wo $\Delta c_r=0$ wird, erhält man aus (6,8) für $c_i$ einen Ausdruck, der für $\Delta a^2<0$ positiv wird.

Damit ist nachgewiesen, daß es für Geschwindigkeitsprofile $U(y)$ mit einem Vorzeichenwechsel von $U''+\frac{1}{R}U'$ stets angefachte Eigenschwingungen gibt. Nach den Ausführungen am Ende des Abschnitts 5 werden also Geschwindigkeitsprofile an konvexen Wänden vor dem Minimum des von der äußeren Strömung eingeprägten Druckes, an konkaven Wänden erst hinter diesem instabil. Jedoch ist der Einfluß der Wandkrümmung außerordentlich gering, denn wegen $U''\sim\frac{U'}{\delta}$ ist $U''+\frac{1}{R}U'\sim U'\left(1+\frac{\delta}{R}\right)$. Die Stelle $y_0$, wo $U''+\frac{1}{R}U'$ verschwindet, wird demnach nur wenig von dem Wendepunkt $y_s$ des Profils abweichen.

Die Tatsache jedoch, daß konvexe Wände einen im obigen Sinne anfachenden, konkave dagegen einen stabilisierenden Einfluß ausüben, dürfte zunächst im Hinblick auf die Vorstellungen, welche man mit der Wirkung der Zentrifugalkräfte verbindet, überraschen; siehe hierüber L. Prandtl [6]. Die Zentrifugalkräfte spielen offenbar keine ins Gewicht fallende Rolle.

Unsere obigen Betrachtungen gelten auch unverändert für Grenzschichten an rotierenden Zylindern. Hier wäre die Wirkung der Zentrifugalkraft eine ganz andere, wenn sie in Erscheinung treten würde. Ruht die Flüssigkeit außerhalb der Grenzschicht, so nimmt $U$ von einem größten Wert $U_M$ an der Wand auf $U=0$ für $y=\delta$ ab. Die Diskussion der Gleichung $U''(y_0)+\frac{1}{R}U'(y_0)=0$ (siehe Abschnitt 5) gibt also wiederum das Resultat: $y_0>y_s$ an konvexen, $y_0<y_s$ an konkaven Wänden. Erst nach Auftreten eines Wendepunkts bei Grenzschichten von Flüssigkeiten innerhalb eines rotierenden Zylinders tritt die berechnete zweidimensionale Instabilität ein, und entsprechend bereits vor Auftreten eines Wendepunkts bei Grenzschichten an der äußeren Wand eines rotierenden Zylinders.

Um nochmals zu den obigen Rechnungen zurückzukehren, sei ergänzend folgendes bemerkt. Tollmien hat auch in der Nachbarschaft einer weiteren neutralen Eigenlösung, nämlich der ausgearteten Eigenschwingung $\varphi=U$, $a=c=0$ im Falle von Wendepunktprofilen angefachte Eigenschwingungen erhalten. Wir verzichten hier darauf, die analogen Betrachtungen für gekrümmte Wände durchzuführen. Einmal interessiert der Fall so kleiner $a$-Werte physikalisch nicht $\left(a\delta\leq O\left(\frac{\delta}{R}\right)!\right)$, da man es dann nicht mit einer eigentlichen Turbulenz zu tun hat; ferner versagt die Betrachtung des Abschnitts 4, da die Größe $(a\,Re\,F''_c)^{-1/3}$ für

sehr kleine $\alpha$-Werte nicht mehr klein bleibt. Schließlich ist zu bemerken, daß im Falle $\alpha R \leqq O(1)$ die Randbedingung (3,2) bei $y = \delta$ zu verbessern wäre, da in der Differentialgleichung für $\chi$ außerhalb der Grenzschicht ein vernachlässigtes Glied $\frac{-1}{4R^2}\chi$ einen Einfluß von einer von uns vereinbarungsgemäß zu berücksichtigenden Ordnung auf die Lösung und damit auf die genannte Randbedingung gewinnt. Diese müßte lauten:

$$\chi'(\delta) + \sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{4R^2}}\,\chi(\delta) = 0.$$

Wir wollen uns damit begnügen hier darauf hinzuweisen, daß $c_i$ zwischen einer in der Nachbarschaft der ebengenannten ($\alpha = 0$) und unserer oben nachgewiesenen neutralen Eigenlösung (mit endlichem $\alpha$) positiver Werte fähig ist.

**7. Zusammenfassung.** Es ist von praktisch wesentlicher Bedeutung, etwa im Hinblick auf die Gestaltung von Tragflügelprofilen, den Einfluß der Flächenkrümmung auf die Entstehung der Turbulenz zu erforschen. In der vorliegenden Arbeit wird das zweidimensionale Problem der Stabilität laminarer Grenzschichtprofile an schwach gekrümmten Wänden vom konstanten Krümmungsradius $R$ gegenüber zweidimensionalen Störungen untersucht.

Das Tollmiensche Kriterium der Instabilität an ebenen Wänden: „Geschwindigkeitsprofile mit Wendepunkt sind instabil" wird für gekrümmte Wände abgewandelt in: „Geschwindigkeitsprofile $U(y)$ mit Vorzeichenwechsel von $U'' + \frac{1}{R}U'$ sind instabil." Demnach tritt die Instabilität gegenüber zweidimensionalen Störungen an konkaven Wänden erst eine gewisse Strecke hinter dem Minimum des von außen der Grenzschicht eingeprägten Druckes, bei konvexen Wänden bereits vor demselben auf. Der Einfluß der Wandkrümmung ist jedoch außerordentlich gering. Die gefährlichen Störungen halten sich bei schwacher Wandkrümmung in der engen Nachbarschaft der von Tollmien für ebene Wände berechneten. (Es handelt sich also um Wellenlängen, die durchaus einer echten Turbulenz entsprechen.)

Zum Schluß weisen wir darauf hin, daß in einer demnächst erscheinenden zweiten Arbeit der Nachweis einer dreidimensionalen Instabilität an konkaven Wänden von der Art der Taylorschen Instabilität zwischen rotierenden Zylindern (G. I. Taylor, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Series A, Bd. 223 (1923), S. 289) erbracht werden wird; gegenüber dieser ist der oben nachgewiesene schwach stabilisierende Einfluß konkaver Wände auf zweidimensionale Störungen von untergeordneter Bedeutung.

Die Anregung zu der vorliegenden Untersuchung verdanke ich meinem hochverehrten Chef und Lehrer, Herrn Prof. L. Prandtl.

## Schriftenverzeichnis.

[1] Lord Rayleigh: On the stability or instability of certain fluid motions. Scientific Papers, a) Bd. I (1880), S. 474 bis 487; b) Bd. III (1887), S. 17 bis 23; c) Bd. IV (1895), S. 203 bis 209; ferner: d) On the stability of the laminar motion of an inviscid fluid, ebendort Bd. VI (1913), S. 197 bis 204. Die angegebenen Jahreszahlen gelten für die Erstdrucke der Schriften.

[2] Noether, F.: Das Turbulenzproblem. Z. angew. Math. Mech. Bd. 1 (1921), S. 125 bis 138.

[3] Prandtl, L.: Bemerkungen über die Entstehung der Turbulenz. Z. angew. Math. Mech. Bd. 1 (1921), S. 431 bis 436.

[4] Tietjens, O.: Beiträge zur Entstehung der Turbulenz. Diss. Göttingen 1922; auszugsweise erschienen in Z. angew. Math. Mech. Bd. 5 (1925), S. 200 bis 217.

[5] Tollmien, W.: Über die Entstehung der Turbulenz. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 1929, S. 21 bis 44.

[6] Prandtl, L.: Einfluß stabilisierender Kräfte auf die Turbulenz. Vorträge aus dem Gebiet der Aerodynamik und verwandter Gebiete. Aachen 1929, S. 1 bis 7.

[7] Schlichting, H.: Über die Entstehung der Turbulenz in einem rotierenden Zylinder. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 1932, S. 160 bis 198.

[8] Schlichting, H.: Zur Entstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 1933, S. 181 bis 208.

[9] Schlichting, H.: Neuere Untersuchungen über die Turbulenzentstehung. Naturwiss. Bd. 22 (1934), S. 376 bis 381.

[10] Tollmien, W.: Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilungen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Fachgruppe I, Neue Folge, Bd. 1 (1935), S. 79 bis 114. 128

# Beitrag zur Theorie des Tragflügels in schwach inhomogener Parallelströmung.

Von *F. Vandrey* in Göttingen.

Wir betrachten im folgenden einen Tragflügel in einer Parallelströmung, deren Richtung zur Flügelachse senkrecht und deren Geschwindigkeit längs jeder Stromlinie konstant ist, von einer Stromlinie zur anderen aber verschieden sein darf. Die Grundströmung soll also quellenfrei, nicht aber wirbelfrei sein. Zunächst nehmen wir an, daß die Wirbel der Grundströmung nur einzelne Schichten bilden, die Gebiete konstanter Geschwindigkeit der Grundströmung voneinander trennen. Von diesen Gebieten seien im ganzen $n$ vorhanden, die wir uns irgendwie numeriert denken. Wir ersetzen in üblicher Weise den Flügel durch einen tragenden Wirbelfaden und das System der abgehenden Wirbel, die wir in Richtung der Grundströmung annehmen. Das Koordinatensystem legen wir so, daß die $x$-Achse der Strömung entgegenzeigt, die $y$-Achse mit dem tragenden Wirbel zusammenfällt und in Flugrichtung gesehen nach rechts positiv ist und die $z$-Achse senkrecht zu den beiden anderen und nach unten gerichtet ist. Wir betrachten einen Schnitt durch die Strömung sehr weit hinter dem Flügel. In diesem Schnitt ist außer der Grundströmung nur noch eine ebene Querströmung vorhanden, die in jedem der $n$ Gebiete wirbelfrei sein und daher ein Potential besitzen wird. Die Berechnung dieser ebenen Querströmung soll unsere erste Aufgabe sein. Aus ihr ergibt sich dann die Zirkulation des Tragflügels in bekannter Weise als der Potentialsprung am abgehenden Wirbelband.

Wir stellen zunächst die Bedingungen zusammen, denen die $n$ Potentialfunktionen an den Wirbelflächen der Grundströmung und am abgehenden Wirbelband des Flügels genügen müssen.

An einer Unstetigkeitsfläche der Grundströmung, in der etwa die beiden Gebiete $G_\nu$ und $G_\mu$ aneinander stoßen, muß zunächst der Druck auf beiden Seiten derselbe sein, da von der Fläche keine Kräfte aufgenommen werden können, ferner muß die Fläche eine Stromfläche sein. Bezeichnet man die Geschwindigkeit der Grundströmung in $G_\nu$ mit $V_\nu$, das Potential der Querströmung mit $\Phi_\nu$, und entsprechend in $G_\mu$, so läßt sich die Druckbedingung, wie C. Koning[1]) gezeigt hat, bis auf quadratische Glieder in den vom Flügel herrührenden Zusatzgeschwindigkeiten erfüllen durch die Forderung

$$V_\nu \cdot \Phi_\nu = V_\mu \, \Phi_\mu \text{ an der Grenze} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Die zweite Bedingung läßt sich durch die Forderung erfüllen, daß sich die Normalgeschwindigkeiten der Querströmung wie die Geschwindigkeiten der Hauptströmung verhalten sollen

$$V_\mu \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial n} = V_\nu \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial n} \text{ an der Grenze} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Zu diesen Bedingungen kommen noch zwei Bedingungen am Wirbelband hinzu. Erstens muß die Normalgeschwindigkeit dort stetig sein:

$$\left(\frac{\partial \Phi_{\nu\,\mathrm{ob}}}{\partial z}\right)_{z=0} = \left(\frac{\partial \Phi_{\nu\,\mathrm{u}}}{\partial z}\right)_{z=0} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Zweitens muß dort die Prandtlsche Tragflügelgleichung gelten, die wir in der Form schreiben

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi_{\nu\,\mathrm{ob}}}{\partial z}\right)_{z=0} + \frac{2}{c_1 t}(\Phi_{\nu\,\mathrm{ob}} - \Phi_{\nu\,\mathrm{u}})_{z=0} = a_g \cdot V_\nu \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

Wir haben jetzt also die folgende Aufgabe der ebenen Potentialtheorie zu lösen:

In jedem der $n$ Gebiete $G_\nu$ ist eine Potentialfunktion $\Phi_\nu$ so zu bestimmen, daß an den Grenzen die Bedingungen (1) und (2) erfüllt sind und in den Gebieten, die von dem abgehenden Wirbelband getroffen werden, außerdem die Bedingungen (3) und (4) gelten.

Diese Aufgabe ist natürlich in voller Allgemeinheit nicht zu lösen, wir wollen uns daher auf den Fall beschränken, daß die Geschwindigkeiten der Grundströmung nur wenig von einem Mittelwert abweichen. Wir setzen

$$V_\nu = V(1 + v_\nu).$$

[1]) C. Koning: Influence of the Propeller on other Parts of the Airplane Structure. In: Durand, Aerodynamic Theory. Berlin 1935, Bd. 4 S. 380 bis 384 und 402 bis 406.

Die Gestalt der Druckbedingung (1) legt es nahe, für das Potential $\Phi_\nu$ dann den Ansatz zu machen

$$\Phi_\nu = (1 - v_\nu)\,\Phi,$$

wo $\Phi$ eine einheitliche Potentialfunktion in der ganzen Ebene bedeutet. Dieser Ansatz erfüllt die Druckbedingung bis auf quadratische, die Kontinuitätsbedingung bis auf lineare Glieder in den Zusatzgeschwindigkeiten. Der Einfluß dieser geringeren Berücksichtigung der Kontinuitätsbedingung soll unten noch näher untersucht werden. Zur Berechnung von $\Phi$ kann dann die Gleichung (4) dienen. Wir dividieren sie noch durch $(1 - v_\nu)$ und erhalten bis auf Glieder höherer Ordnung

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,\Phi_{ob}}{\partial\,z}\right)_{z=0} + \frac{2}{c_1\,t}(\Phi_{ob} - \Phi_u)_{z=0} = [a_g\,(1 + 2\,v_\nu)]\,V. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Dies ist aber die Prandtlsche Gleichung für einen Ersatzflügel mit dem geometrischen Anstellwinkel $a_g\,(1 + 2\,v_\nu)$ in einer gleichförmigen Parallelströmung von der Geschwindigkeit $V$. Sie kann daher nach den hierfür bekannten Verfahren gelöst werden. Ist $\Phi$ (oder auch nur $\Gamma = (\Phi_{ob} - \Phi_u)_{z=0}$) berechnet, so wird die Zirkulationsverteilung des Flügels in der inhomogenen Strömung auf Grund des Ansatzes

$$\Gamma_\nu = (1 - v_\nu)\,\Gamma.$$

Die Zirkulationsverteilung wird also an den Stellen unstetig, wo der Flügel die Unstetigkeitsflächen der Grundströmung schneidet. Die Auftriebsverteilung des Flügels in der inhomogenen Grundströmung wird dann nach dem Satze von Kutta und Joukowski

$$\frac{d\,A}{d\,y} = \varrho\,V_\nu\,\Gamma_\nu = \varrho\,V\,\Gamma$$

bis auf quadratische Glieder. Sie ist also identisch mit der Auftriebsverteilung des Ersatzflügels.

Die erweiterte Tragflügelgleichung (5) gestattet auch noch den Grenzübergang zu einer Grundströmung mit stetig veränderlicher Geschwindigkeit. Ist die Geschwindigkeit am Orte des Flügels etwa gegeben durch

$$V(y) = V\,(1 + v\,(y)),$$

so erhält man die Auftriebsverteilung des Flügels als Auftriebsverteilung eines Ersatzflügels mit der $c_1\,t$-Verteilung des gegebenen und der Anstellwinkelverteilung $a_g\,(1 + 2\,v\,(y))$ in gleichförmiger Parallelströmung von der Geschwindigkeit $V$.

Wir wollen jetzt noch auf die Fehler eingehen, die der Rechnung durch die Vernachlässigung der linearen Glieder in der Kontinuitätsbedingung anhaften. Diese Vernachlässigung hat u. a. zur Folge, daß nur die Ungleichförmigkeiten der Grundströmung am Orte des Flügels in die Rechnung eingehen, während alle den Flügel nicht schneidenden Wirbelflächen der Grundströmung ohne Einfluß bleiben. Wir denken uns nun bei einer gegebenen Verteilung der Grundgeschwindigkeit am Orte des Flügels die Berechnung der zum Ersatzflügel gehörenden Potentialfunktion $\Phi$ durchgeführt und fragen danach, ob sich die Unstetigkeitsflächen der Grundströmung von ihren Schnittpunkten mit dem Flügel aus nicht so fortsetzen lassen, daß für die dann entstehende neue Grundströmung die Kontinuitätsbedingung an den Gebietsgrenzen von selbst erfüllt ist. Man sieht leicht ein, daß dies möglich ist, denn die Kontinuitätsbedingung ist exakt erfüllt, falls auf allen Grenzen $\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,n} = 0$ ist, d. h. falls die Grenzen der Gebiete Stromlinien der durch $\Phi$ gegebenen ebenen Querströmung hinter dem Ersatzflügel sind. Der Verlauf dieser Stromlinien läßt sich aber bestimmen, man vermag daher zu beurteilen, ob die wirklich vorliegende Grundströmung mit der durch $\Phi$ gegebenen in der Nähe des Flügels so weit übereinstimmt, daß die Berechnung der Auftriebsverteilung nach der oben abgeleiteten Tragflügelgleichung zulässig erscheint.

Bei der Bestimmung derjenigen Grundströmung, für die die Berechnung der Auftriebsverteilung eigentlich gilt, kann noch eine grundsätzliche Schwierigkeit auftreten, falls der Abwind des Ersatzflügels $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,\Phi_{ob}}{\partial\,z}\right)_{z=0}$ längs der Spannweite sein Vorzeichen wechselt. In diesem Falle gibt es nämlich Stromlinien der ebenen Querströmung, die oberhalb des Flügels von den Aufwindgebieten zu den Abwindgebieten und unterhalb in entgegengesetzter Richtung verlaufen. Da diese den Flügel zweimal schneidenden Stromlinien in der inhomogenen Grundströmung Linien konstanter Geschwindigkeit sein sollten, müßte die Grundgeschwindigkeit an ihren beiden Schnittpunkten mit dem Flügel dieselbe sein. Dies wird aber im allgemeinen nicht der Fall sein, und dann gibt es genau genommen überhaupt keine Grundströmung, für die die angewendete Berechnungsmethode richtig ist. Ein Beispiel für diesen Fall läßt sich

leicht angeben, wenn man etwa für einen unendlich langen unverwundenen Flügel konstanter Tiefe sich das Potential $\Phi$ der ebenen Querströmung hinter dem Ersatzflügel vorgibt und dann nach der Tragflügelgleichung die zugehörige Geschwindigkeitsverteilung der inhomogenen Grundströmung am Flügel ausrechnet. Wir betrachten als einfaches Beispiel dieser Art das Potential

$$\Phi_{ob} = \frac{c_1 t}{4} V a_g \left[1 + \frac{2k}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{y^*-1}{z^*-1} - \operatorname{arctg}\frac{y^*+1}{z^*-1}\right)\right]$$

$$\Phi_u = -\frac{c_1 t}{4} V a_g \left[1 - \frac{2k}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{y^*-1}{z^*+1} - \operatorname{arctg}\frac{y^*+1}{z^*+1}\right)\right].$$

Hierin ist

$$y^* = \frac{y}{c_1 t}, \qquad z^* = \frac{z}{c_1 t}$$

und $k$ ein als klein vorausgesetzter Proportionalitätsfaktor für die Übergeschwindigkeiten der zu berechnenden inhomogenen Grundströmung. In Bild 1 ist ein Stromlinienbild der durch $\Phi$ gegebenen Querströmung und darunter die Abwindverteilung des Ersatzflügels gezeichnet.

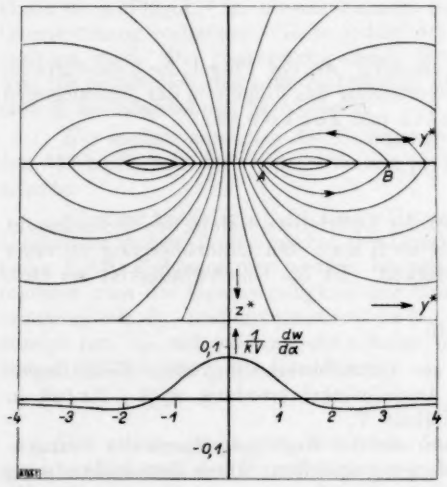



Bild 1. Beispiel für das Stromlinienbild der ebenen Querströmung hinter einem unendlich langen Flügel konstanter Tiefe und Verteilung des Abwindes längs der Spannweite.

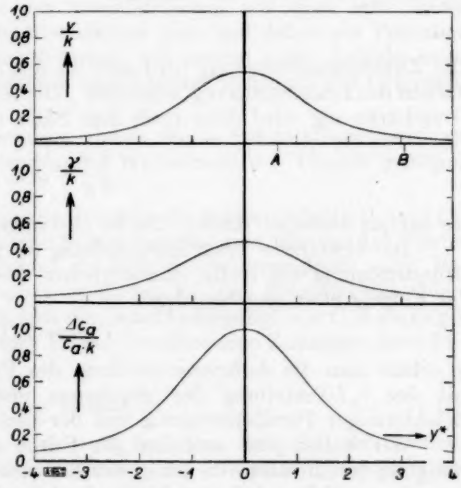



Bild 2. Verteilung der zusätzlichen Geschwindigkeit der inhomogenen Grundströmung, der zusätzlichen Zirkulation und des zusätzlichen Auftriebes für das Beispiel des Bildes 1.

Nach diesem Stromlinienbild müßte in den beiden mit $A$ und $B$ bezeichneten Punkten des Flügels in der inhomogenen Grundströmung die gleiche Geschwindigkeit herrschen. Die nach der Tragflügelgleichung berechnete Geschwindigkeitsverteilung der inhomogenen Grundströmung ist in Bild 2 oben gezeichnet; man erkennt, daß die Geschwindigkeiten in $A$ und $B$ nicht übereinstimmen. Es gibt hier also eigentlich überhaupt keine Grundströmung, für die die berechneten Zirkulations- und Auftriebsverteilungen des Flügels in der inhomogenen Grundströmung richtig sind. Dies hindert natürlich nicht, daß sie trotzdem ein qualitativ brauchbares Bild der in inhomogenen Strömungen vorliegenden Verhältnisse geben können. Ähnlich wie in diesem Falle erhalten übrigens bei dem unendlich langen unverwundenen Flügel konstanter Tiefe auch in allen anderen Fällen die Gebiete mit kleinerer Grundgeschwindigkeit Aufwind, da für den verwundenen Ersatzflügel die Ungleichmäßigkeiten des Anstellwinkels in der Zirkulationsverteilung weitgehend ausgeglichen sind. Für den unverwundenen unendlich langen Flügel konstanter Tiefe gibt es daher genau genommen niemals eine inhomogene Grundströmung, für die seine Auftriebsverteilung nach der hier dargelegten Methode berechnet werden darf. Da aber der Fall eines solchen Flügels nur ein vereinfachtes Bild ist für die Verhältnisse im Mittelstück eines endlichen Flügels großer Spannweite, so braucht man dieser grundsätzlichen Schwierigkeit keine allzu große Bedeutung beizumessen.

Man kann weiterhin noch die Frage stellen, ob nicht für gewisse Grundströmungen auf die Voraussetzung der Kleinheit der Übergeschwindigkeiten $v_y$ verzichtet werden darf. (Aus physikalischen Gründen muß hierbei $v_y > -1$ gefordert werden, da der Fall $v_y < -1$ einer Anströmung des Flügels von hinten entspricht, bei der andere Verhältnisse vorliegen. Der Fall $v_y = -1$ (d. h. Anströmgeschwindigkeit Null in einem der Gebiete) erfordert eine be-

sondere Untersuchung, er soll deshalb hier ausgeschlossen werden.) Dies ist möglich, wenn man dem Ansatz für die Potentiale $\Phi_\nu$ die Form gibt

$$\Phi_\nu = \frac{1}{1+v_\nu}\,\Phi^*.$$

Für die Potentialfunktion $\Phi^*$ erhält man damit als Bedingung

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,\Phi^*_{ob}}{\partial\,z}\right)_{z=0} + \frac{2}{c_1\,t}(\Phi^*_{ob} - \Phi^*_u)_{z=0} = \alpha_g\,(1+v_\nu)^2\,V.$$

Sind dann die Gebietsgrenzen (bzw. bei stetiger Geschwindigkeitsverteilung die Linien konstanter Grundgeschwindigkeit) Stromlinien der durch $\Phi^*$ gegebenen Strömung, so ist auch die Kontinuitätsbedingung exakt erfüllt, und man erhält für die Auftriebsverteilung eines Flügels in einer solchen Grundströmung wiederum das einfache Ergebnis

$$\frac{d\,A}{d\,y} = \varrho\,V(\Phi^*_{ob} - \Phi^*_u).$$

Zum Schluß unserer Fehlerbetrachtungen sei noch auf einen Umstand hingewiesen, der bei der Anwendung auf praktische Fälle beachtet werden muß. Unserer Rechnung liegt die Annahme zugrunde, daß die Grundströmung durch den Einfluß des Flügels nicht wesentlich geändert wird. Bei größeren Auftriebskräften trifft aber diese Annahme nicht mehr zu, und es können Verformungen der Unstetigkeitsflächen der Grundströmung auftreten, die zu Abweichungen der gemessenen Auftriebsverteilungen von den berechneten führen. Es sei hierzu verwiesen auf die Messungen von J. Stüper zur Prüfung der Koningschen Theorie, wo derartige Einflüsse vermutet wurden.

Als Beispiel zu den obigen Entwicklungen ist in Bild 3 die Auftriebsverteilung eines Rechteckflügels vom Seitenverhältnis $b/t = 5$ gezeichnet, der einen Schraubenstrahl von der Breite $0{,}2\,b$ mit 10 % und 20 % Übergeschwindigkeit schneidet. Darunter ist zum Vergleich noch die Auftriebsverteilung eingezeichnet, wie sie sich ohne Beachtung der Druckbedingungen durch formales Rechnen mit der gewöhnlichen Prandtlschen Tragflügelgleichung ergeben würde. In Bild 4 ist dann noch die eigentliche Gestalt des „Schraubenstrahles" gezeichnet, wie sie sich aus den Fehlerbetrachtungen ergibt. Man sieht, daß diese sehr erheblich von der gewünschten Form eines Kreisstrahles abweicht, und man wird daher einige Bedenken dagegen haben, die Rechnung auf den Fall eines Flügels im Kreisstrahle anzuwenden.

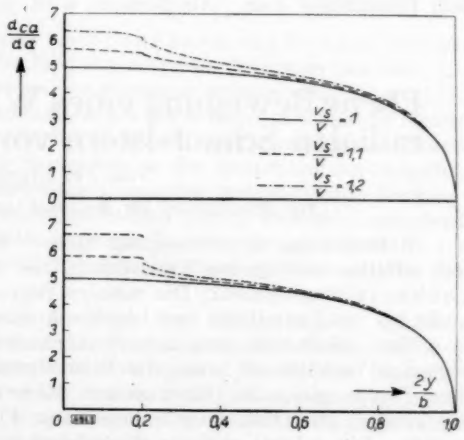



Bild 3 (oben). Auftriebsverteilung eines Rechteckflügels ($b/t = 5$), der einen Schraubenstrahl von der Breite $0{,}2\,b$ mit 10 % und 20 % Übergeschwindigkeit schneidet. Darunter zum Vergleich die ohne Berücksichtigung der Druckbedingungen an den Strahlrändern berechnete Auftriebsverteilung des gleichen Flügels.

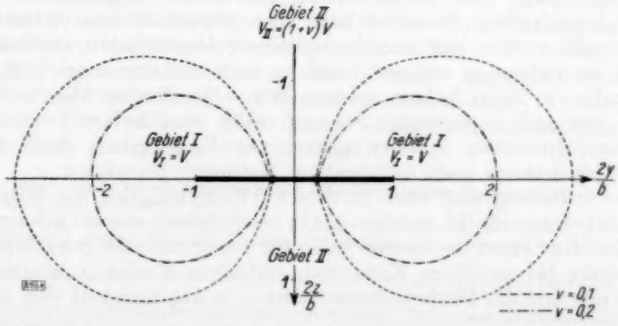



Bild 4 (rechts). Form der Strahlränder, für die die in Bild 3 gezeichneten Auftriebsverteilungen in inhomogener Strömung eigentlich gelten.

Ein Vergleich der berechneten Verteilung mit Messungsergebnissen ist z. Zt. leider noch nicht möglich. Messungen zur Prüfung der Koningschen Theorie, die in der hier dargelegten enthalten ist, sind von J. Stüper[2]) ausgeführt worden. Sie ergaben beträchtlich kleineren Einfluß als die Rechnung (30 % der berechneten Werte). Stüper führt dies neben

[2]) J. Stüper: Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 181.

Einflüssen der Grenzschicht darauf zurück, daß bei den Messungen die Flügeltiefe größer war als der Strahldurchmesser und daß deshalb die Strahlform durch den Flügel erheblich gestört wurde, so daß die Voraussetzung der Rechnung nicht mehr zutrifft, daß der Einfluß des Flügels auf die Grundströmung zu vernachlässigen ist. Nach unseren Ergebnissen könnte man noch an eine andere Möglichkeit zur Erklärung des Unterschiedes zwischen Rechnung und Messung denken. Da sich nämlich die Koningsche Rechnung genau genommen gar nicht auf einen Kreisstrahl bezieht, sondern in dem bei den Messungen vorliegenden Fall (Rechteckflügel mit Endscheiben) auf eine Strahlform, die der in Bild 4 gezeichneten ähnlich sein dürfte (falls es überhaupt eine alle Bedingungen erfüllende Grundströmung in diesem Falle gibt), so könnte es sein, daß der Kreisstrahl nicht mehr eine zulässige Grundströmung ist. Es ist hierbei zu erwarten, daß für den Kreisstrahl der Abwind größer und die Zirkulation kleiner wird als für die der Rechnung eigentlich zugrunde liegende Strömung, so daß die Unterschiede auch hierdurch erklärt werden könnten. Nach beiden Erklärungsversuchen müßte man jedoch erwarten, daß die Übereinstimmung von Rechnung und Messung sich bessert, wenn die Flügeltiefe klein gegen den Strahldurchmesser gemacht wird.

**Zusammenfassung.** Die Berechnung der Auftriebsverteilung eines Tragflügels in einer schwach inhomogenen Parallelströmung mit von Ort zu Ort verschiedener Geschwindigkeit wird zurückgeführt auf die Berechnung der Auftriebsverteilung eines Flügels gleicher Tiefenverteilung mit einer zusätzlichen Verwindung in homogener Parallelströmung. Die Verwindung wird dabei bestimmt aus der Bedingung der Druckgleichheit auf den beiden Seiten einer Fläche konstanter Grundgeschwindigkeit. Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Methode ist, daß sich die Geschwindigkeit der Grundströmung in der zum Flügel senkrechten Richtung nicht viel ändert, genau genommen müssen die Linien konstanter Grundgeschwindigkeit in einem vertikalen Schnitt weit hinter dem Flügel Stromlinien der ebenen Querströmung hinter dem Ersatzflügel sein. Als Beispiel wird ein Rechteckflügel im Schraubenstrahl behandelt.

155

# Ebene Bewegung eines Wirbelkranzes am rotierenden radialen Schaufelstern von endlichen Schaufellängen[1].

Von *Fr. Florin* in Berlin-Tegel.

(Aus dem Institut für Mechanik an der Technischen Hochschule Berlin.)

**1. Einleitung.** Die Bewegung eines Wirbels innerhalb eines von einer idealen Flüssigkeit erfüllten rotierenden Kreissektors, bei überlagerter Quellströmung, wurde bereits von Kucharski[2] untersucht. Die radialen Begrenzungen dieses Sektors erstrecken sich vom Drehpunkt bis ins Unendliche und begrenzen eine nach außen gleichfalls unbegrenzte Flüssigkeit.

Man erhält nun eine bessere Annäherung an die beispielsweise bei einer Pumpe vorliegenden Verhältnisse, wenn die Wirbelbahnen unter Zugrundelegung des Betriebszustandes einer Pumpe gleich für einen ganzen Stern radialer, sich nicht mehr bis ins Unendliche erstreckender, aber von einer unbegrenzten Flüssigkeit eingeschlossener Schaufeln untersucht werden. Ein solcher radialer Schaufelstern ist das einfachste und deswegen einer exakten Berechnung der Wirbelbahnen am besten zugängliche Schema eines zweidimensionalen Schaufelrades. Dasselbe kann dem Aussehen eines Schaufelrades dadurch noch weiter angepaßt werden, daß man die radialen Schaufelspuren nicht nur auf einem Kreis vom endlichen Außenradius $\varrho_a$ endigen, sondern auch auf einem zweiten, konzentrischen Kreis vom Innenradius $\varrho_i$ ihren Anfang nehmen läßt. Ein dem wirklichen Aussehen eines Schaufelrades noch besser sich anpassendes Schema erhält man dadurch, daß man den Schaufelspuren eine nach logarithmischen Spiralen gekrümmte Form gibt. Auch in diesen Fällen lassen sich die Wirbelbahnen noch mit exakten Methoden berechnen.

Bislang sind aber in diesen Fällen lediglich die Strömungserscheinungen ohne Einzelwirbel untersucht worden. Als erste Arbeit dieser Art erschien 1918 eine Monographie von Kucharski[3], in welcher u. a. für einen radialen Schaufelstern, dessen Schaufeln vom Drehpunkt bis zu einem Kreis vom endlichen Radius $\varrho_a$ reichen, das Bild der relativen Stromlinien und das Förderhöhenverhältnis in Abhängigkeit von der Schaufelzahl $n$ ermittelt wurde.

[1] Diese Arbeit wurde von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Hochschule Berlin als Doktorarbeit angenommen. Referenten: Prof. W. Kucharski und Prof. G. Hamel. Vorsitzender: Prof. H. Föttinger. Herrn Prof. Kucharski schuldet der Verfasser für wertvolle Ratschläge und Belehrungen besonderen Dank.

[2] W. Kucharski: Bewegung eines Wirbels in einem nach außen offenen Kreissektor. Forsch. Ing.-Wes. Bd. 8 (1937), S. 14. Ferner eine bisher unveröffentlichte Arbeit über den gleichen Gegenstand, in welcher die Integration der Wirbelbahnen geschlossen durchgeführt wurde.

[3] W. Kucharski: Strömungen einer reibungsfreien Flüssigkeit bei Rotation fester Körper. München und Berlin 1918.

Eine Erweiterung auf den radialen Schaufelstern, dessen Schaufeln von den konzentrischen Kreisen mit den Radien $\varrho_i$ und $\varrho_a$ begrenzt werden, brachte die 1925 erschienene Arbeit von Spannhake[4]). In derselben wurde das Förderhöhenverhältnis in Abhängigkeit von der Schaufelzahl $n$ und dem Radienverhältnis $\frac{\varrho_i}{\varrho_a}$ berechnet. Dieser Arbeit folgten nun in kürzeren Zeitabständen die Arbeiten von Sörensen[5]) (1927), Schulz[6]) (1928) und Busemann[7]) (1928), die eine Krümmung der Schaufelspuren nach logarithmischen Spiralen in Betracht ziehen. In ihnen wurde gleichfalls das Förderhöhenverhältnis berechnet.

In der vorliegenden Arbeit, die auf Anregung von Herrn Prof. Kucharski im Institut für Mechanik der Technischen Hochschule Berlin durchgeführt wurde, sollen nun die Bewegung und die Ruhelagen eines Wirbelkranzes am radialen Schaufelstern von endlichen Schaufellängen untersucht werden, und zwar unter Nachahmung des Betriebszustandes einer Kreiselpumpe. Es ist bekannt, daß beim Betrieb einer Pumpe an den Schaufeln Wirbel entstehen, die sich von den Schaufelenden periodisch ablösen. Auf Veranlassung von Herrn Prof. Spannhake sind diese Wirbelbildungen und Wirbelablösungen an umlaufenden radialen und logarithmisch-spiraligen Schaufeln, mit und ohne Überlagerung einer Quellströmung, zum Gegenstand einer experimentellen Untersuchung gemacht worden, die von Frietsch[8]) durchgeführt wurde.

Da sich die folgenden Untersuchungen auf die Bewegung von Wirbeln in einer reibungsfreien Flüssigkeit beziehen, in der die Entstehung von Wirbeln unmöglich ist, müssen wir die Wirbel als von vornherein vorhanden ansehen. Die Untersuchungen von Frietsch können also nur insoweit zum Vergleich herangezogen werden, als dieselben sich nicht mehr auf die eigentliche Entstehung der Wirbel beziehen. Hierzu wird man aber erst noch die angekündigte weitere Arbeit abwarten müssen, welche die theoretische Verarbeitung der Versuchsergebnisse bringen soll.

Die in der vorliegenden Arbeit in Anlehnung an Spannhake und Schulz benutzte konforme Abbildung des Schaufelsterns auf den Umfang eines Kreises bringt es mit sich, daß wir gleich die Bewegung eines ganzen Wirbelkranzes studieren müssen, der aus so vielen Wirbeln von gleichem Drehsinn und gleicher Stärke besteht, als das Kreiselrad Schaufeln besitzt.

Die Einführung eines solchen Wirbelkranzes dürfte aber auch vom physikalischen Standpunkt aus durchaus gerechtfertigt sein. Denn die Symmetrie in der Anordnung der Schaufeln spricht doch dafür, daß in den einzelnen Schaufelräumen einander entsprechende Vorgänge sich abspielen, daß also an den einander entsprechenden Stellen gleich drehende und gleich starke Wirbel vorhanden sind, und daß dieselben kongruente Bahnen durchlaufen. Die von Frietsch veröffentlichen relativen Stromlinienbilder geben für diese Auffassung eine ausgezeichnete Bestätigung.

In der Literatur findet man bereits eine große Zahl von Abhandlungen, in denen Wirbelbahnen für einfachere Fälle berechnet wurden. Die Verfasser dieser Arbeiten bedienen sich entweder des Helmholtz-Kirchhoffschen Grundsatzes, so z. B. die uns besonders interessierenden Arbeiten von Hamel[9]), Kucharski[10]) und Barth[11]), oder sie bedienen sich der im folgenden ebenfalls benutzten und im wesentlichen als bekannt vorausgesetzten Routhschen Methode, wie z. B. die Arbeiten von Paul[12]), Kneschke[13]) und Kneschke-Matthes[14]). Zwischen diesen beiden Verfahren besteht natürlich ein analytischer Zusammenhang, über den Herr Prof. Kucharski im Winter-Semester 1937/38 in einem Vortrag im Seminar für Mechanik an der Technischen Hochschule Berlin gesprochen hat.

Über die Theorie der Wirbelbewegung findet man in der Literatur gleichfalls eine größere Zahl von Abhandlungen, auf deren Aufzählung hier verzichtet werden kann. Es mag genügen, auf eine neuere Arbeit von Kneschke[15]) über diesen Gegenstand hinzuweisen, zumal derselben weitere Literaturangaben entnommen werden können.

---

[4]) W. Spannhake: Die Leistungsaufnahme einer parallelkränzigen Zentrifugalpumpe mit radialen Schaufeln. Festschrift zur Hundertjahrfeier der T. H. Karlsruhe. Karlsruhe 1925.

[5]) E. Sörensen: Potentialströmungen durch rotierende Kreiselräder. Z. angew. Math. Mech. Bd. 7 (1927), S. 89.

[6]) W. Schulz: Das Förderhöhenverhältnis radialer Kreiselpumpen mit logarithmisch-spiraligen Schaufeln. Z. angew. Math. Mech. Bd. 8 (1928), S. 10.

[7]) A. Busemann: Das Förderhöhenverhältnis radialer Kreiselpumpen mit logarithmisch-spiraligen Schaufeln. Z. angew. Math. Mech. Bd. 8 (1928), S. 372.

[8]) E. Frietsch: Wirbelbildung u. Kräftewirkung an umlaufenden Kreiselradschaufeln. VDI-Forsch.-Heft 384 (1937).

[9]) G. Hamel: Bewegung eines geradlinigen Wirbels um eine Buhne. Z. angew. Math. Mech. Bd. 13 (1933), S. 98.

[10]) W. Kucharski: a. a. O. [2]).

[11]) W. Barth: Wirbelbahnen um Wände und Platten von unendlich kleiner Wandstärke. Z. angew. Math. Mech. Bd. 10 (1930), S. 247.

[12]) E. Paul: Bewegung eines Wirbels in geradlinig begrenzten Gebieten. Z. angew. Math. Mech. Bd. 14 (1934), S. 105.

[13]) A. Kneschke: Über die Bewegung von Wirbeln in einem einseitig begrenzten Kanal. Ann. Phys. Bd. 14 (1932), S. 655.

[14]) A. Kneschke u. S. Matthes: Wirbelbewegung um einen Kreiszylinder. Ann. Phys. Bd. 9 (1931), S. 916.

[15]) A. Kneschke: Zur Theorie der Wirbelbewegung. Z. angew. Math. Mech. Bd. 18 (1938), S. 343.

**2. Die Abbildungsfunktion.** Die von Spannhake, Sörensen, Schulz und Busemann benutzten Abbildungsfunktionen, durch die der endliche Schaufelstern entweder auf den Umfang eines Kreises oder auf die reelle Achse abgebildet wird, bleiben auch bei der Berechnung von Wirbelbahnen ohne weiteres anwendbar, da der Wirbel am Kreis und an der unendlichen Geraden gespiegelt werden kann. Wir werden uns im folgenden der von Schulz benutzten Abbildung des nach logarithmischen Spiralen gekrümmten Schaufelsterns auf den Einheitskreis bedienen, indem wir dieselbe auf den zu untersuchenden Spezialfall des radialen Schaufelsterns anwenden.

Der Einheitskreis sei in der Ebene mit der komplexen Veränderlichen $z = x + iy = r \cdot e^{i\varphi}$ gelegen. Dann überführen ihn die folgenden beiden Transformationen in einen in der Ebene mit der komplexen Veränderlichen $w = u + iv = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$ gelegenen, aus $n$ radialen Schaufeln bestehenden Schaufelstern:

$$\lambda = \frac{q}{2} \cdot \left(z + \frac{1}{z}\right) + p \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

$$w = \sqrt[n]{\lambda} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Durch die erste Transformation wird der Einheitskreis in der $z$-Ebene, dessen Mittelpunkt mit dem Punkt $z = 0$ zusammenfällt, auf das von $p - q$ bis $p + q$ reichende, auf der reellen Achse der $\lambda$-Ebene gelegene Geradenstück abgebildet. Durch die zweite Transformation wird eine Verkleinerung aller den Koordinatenanfangspunkt als Scheitelpunkt besitzenden Winkel auf den $n$-ten Teil, sowie eine radiale Verzerrung bewirkt. Dadurch entsteht der gewünschte radiale Schaufelstern, bestehend aus $n$ vom Innenradius $\varrho_i = \sqrt[n]{p - q}$ bis zum Außenradius $\varrho_a = \sqrt[n]{p + q}$ reichenden Schaufeln. In Bild 1 ist dieser Schaufelstern für den Fall $n = 6$ dargestellt worden.

Fassen wir die beiden Transformationen (1) und (2) zu einer einzigen zusammen, so erhalten wir die Beziehung

$$w = \sqrt[n]{\frac{q}{2} \cdot \left(z + \frac{1}{z}\right) + p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3),$$

durch welche der Einheitskreis der $z$-Ebene in den radialen Schaufelstern der $w$-Ebene überführt wird. Dabei wird der Außenbereich des Kreises bereits auf die gesamte $w$-Ebene abgebildet.

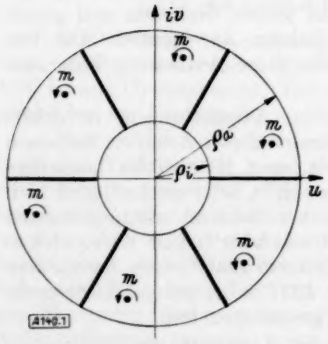


Bild 1.

Setzt man in Gl. (3) $p = q$, so erhält man den Spezialfall, daß die radialen Schaufeln bis zum Drehpunkt des Schaufelrades reichen.

Singularitäten treten auf durch die $z - \lambda$-Abbildung in den Endpunkten der Schaufeln, die den beiden Kreispunkten $z = \pm 1$ entsprechen, und durch die $\lambda - w$-Abbildung im Punkt $w_0 = 0$, der dem für $p > q$ außerhalb des Einheitskreises, und für $p = q$ auf dem Einheitskreis gelegenen reellen Punkt

$$z_0 = -\frac{1}{q} \cdot (p + \sqrt{p^2 - q^2}) \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

entspricht.

**3. Das komplexe Potential des Wirbelkranzes.** An einer außerhalb des Einheitskreises der $z$-Ebene gelegenen Stelle $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ möge sich ein linksdrehender Wirbel von der Zirkulation $\Gamma$, also von der Wirbelstärke $m = \frac{\Gamma}{2\pi}$ befinden. Durch die Abbildung (3) werden aus diesem einen Wirbel $n$ Wirbel von gleichem Drehsinn und gleicher Stärke, die miteinander den in Bild 1 eingezeichneten Wirbelkranz bilden.

Es soll nun das komplexe Potential des durch diesen Wirbelkranz am radialen Schaufelstern in der unbegrenzten Flüssigkeit erzeugten momentanen Stromlinienfeldes ermittelt werden. Zu dem Zweck brauchen wir nur das komplexe Potential desjenigen momentanen Stromlinienfeldes anzuschreiben, das durch den einen an der Stelle $z_1$ der $z$-Ebene gelegenen Wirbel um die Kontur des Einheitskreises in der unbegrenzten Flüssigkeit erzeugt wird. In diesem Stromlinienfeld muß der Einheitskreis eine Stromlinie sein. Das komplexe Potential dieses Feldes läßt sich in bekannter Weise dadurch gewinnen, daß der an der Stelle $z_1$ gelegene

Wirbel am Einheitskreis gespiegelt wird, wodurch an der Stelle $\frac{1}{\bar{z}_1}$ ein spiegelbildlicher Wirbel von gleicher Stärke, aber von entgegengesetztem Drehsinn entsteht. Dies hat aber zur Folge, daß wir in dem durch diese beiden Wirbel erzeugten Stromlinienfeld eine rechtsdrehende Zirkulation von der Stärke $m$ um den Einheitskreis erhalten. Da wir jedoch später zwecks Berücksichtigung der Zirkulationsströmung um die Schaufeln ohnehin eine Zirkulation um den Einheitskreis in Ansatz bringen müssen, und da wir über ihre Stärke noch in ganz bestimmter Weise verfügen wollen, ist es zweckmäßig, diese hier unerwünschte Zirkulation unter Wahrung der Randbedingung, daß der Einheitskreis Stromlinie sein muß, dadurch zum Verschwinden zu bringen, daß wir im Punkt $z=0$ noch einen dritten, gleich starken, linksdrehenden Wirbel anbringen. Das komplexe Potential $F(z)$ dieser drei Wirbel lautet dann

$$F(z)=\frac{m}{i}\cdot\left\{\ln(z-z_1)-\ln\left(z-\frac{1}{\bar{z}_1}\right)+\ln z\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Dieser Ausdruck stellt zugleich das in den Koordinaten der $z$-Ebene ausgedrückte komplexe Potential des Wirbelkranzes am Schaufelstern der $w$-Ebene dar.

**4. Die Routhsche Stromfunktion für die Wirbelbahnen am Einheitskreis.** Um die Routhsche Stromfunktion[16]) für die von unserem Wirbel in der $z$-Ebene des Einheitskreises innerhalb der unbegrenzten Flüssigkeit durchlaufenen Wirbelbahnen zu erhalten, berechnen wir zunächst nach dem Helmholtz-Kirchhoffschen Grundsatz die Geschwindigkeitskomponenten $\dot{r}_1$ und $r_1\dot{\varphi}_1$ des an der Stelle $z_1$ der $z$-Ebene befindlichen Wirbels. Hierzu ist eine im vorliegenden, sich nur auf die $z$-Ebene beziehenden Fall einfache Limesbildung vorzunehmen, als deren Ergebnis wir zunächst die konjugierte Geschwindigkeit $\dot{\bar{z}}_1=\dot{x}_1-i\dot{y}_1$ des Wirbels erhalten. Vor der Grenzwertbildung $z\to z_1$ ist nach $z$ zu differenzieren; diese Differentiation ist aber nicht an dem durch Gl. (5) dargestellten komplexen Potential $F(z)$, sondern an dem um das Potential $\frac{m}{i}\cdot\ln(z-z_1)$ des betrachteten Wirbels, der sich ja selbst keine Geschwindigkeit induziert, verminderten Potential durchzuführen. Wir erhalten so

$$\dot{\bar{z}}_1=\frac{m}{i}\cdot\lim_{z\to z_1}\left[\frac{d}{dz}\left\{-\ln\left(z-\frac{1}{\bar{z}_1}\right)+\ln z\right\}\right]=\frac{m}{i}\cdot\left\{-\frac{1}{z_1-\frac{1}{\bar{z}_1}}+\frac{1}{z_1}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Hieraus ermitteln wir die Radialgeschwindigkeit $r_1$ und die Umfangsgeschwindigkeit $r_1\dot{\varphi}_1$ des Wirbels zu

$$\dot{r}_1=0\,,\qquad r_1\dot{\varphi}_1=-\frac{m}{r_1\cdot(r_1^2-1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Diese Geschwindigkeitskomponenten erfüllen zwar die Kontinuitätsgleichung, nicht aber die Bedingung der Wirbelfreiheit. Wir können also die Geschwindigkeitskomponenten des Wirbels als die Geschwindigkeitskomponenten einer zwar quellenfreien, aber nicht wirbelfreien Hilfsströmung deuten, für die zwar eine Stromfunktion, aber kein Geschwindigkeitspotential, und somit auch kein komplexes Potential existiert.

Wir wollen nun die zu diesen Geschwindigkeitskomponenten gehörende Routhsche Stromfunktion $\chi_z$ für die Wirbelbahnen in der $z$-Ebene berechnen. Dies hat mittels der bekannten Beziehungen

$$\dot{r}_1=\frac{1}{r_1}\cdot\frac{\partial\chi_z}{\partial\varphi_1}\,,\qquad r_1\dot{\varphi}_1=-\frac{\partial\chi_z}{\partial r_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

zu geschehen. Die gesuchte Routhsche Stromfunktion $\chi_z$ ergibt sich hieraus nach Einsetzen der Geschwindigkeitskomponenten (7) bis auf eine additive Konstante zu

$$\chi_z=\frac{m}{2}\cdot\ln\frac{r_1^2-1}{r_1^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Die Gleichung der in der $z$-Ebene durchlaufenen Wirbelbahnen lautet dann $\chi_z=\text{konst}$. Diese Bahnen sind Kreise, die zum Einheitskreis konzentrisch sind.

**5. Die Routhsche Stromfunktion für die Wirbelbahnen am Schaufelstern.** Der Routhschen Stromfunktion für die Wirbelbahnen am Schaufelstern muß ein besonderer Abschnitt gewidmet werden, da die im vorigen Abschnitt ermittelte Routhsche Stromfunktion $\chi_z$ für die Wirbelbahnen am Einheitskreis der $z$-Ebene nicht zugleich die lediglich in den Koordinaten der $z$-Ebene ausgedrückte Routhsche Stromfunktion $\chi_w$ für die Wirbelbahnen am Schaufel-

[16]) Für die in dieser Arbeit untersuchten Wirbelbahnen existiert eine sog. Routhsche Stromfunktion, die zu der Schar der Wirbelbahnen in derselben Beziehung steht, wie die gewöhnliche Stromfunktion zu der Schar der zugehörigen Stromlinien.

stern der $w$-Ebene darstellt. Die in der $z$-Ebene ermittelten Wirbelbahnen gehen nämlich bei der konformen Abbildung in die $w$-Ebene nicht in die gesuchten Wirbelbahnen der $w$-Ebene über. Vielmehr müssen wir uns zu ihrer Ermittlung des Routhschen Verfahrens bedienen, das den Zusammenhang zwischen der bekannten Stromfunktion $\chi_z$ und der gesuchten Stromfunktion $\chi_w$ klarstellt. Hiernach besteht zwischen diesen beiden Stromfunktionen die wichtige Beziehung

$$\chi_w = \chi_z + \frac{m}{2} \cdot \ln \left| \frac{d w_1}{d z_1} \right| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Mit Hilfe dieser Beziehung gestaltet sich die Berechnung von $\chi_w$ folgendermaßen: Wir bilden zunächst aus unserer Abbildungsfunktion (3) den Differentialquotienten $\frac{d w_1}{d z_1}$, indem wir ihn nach der Kettenregel zerlegen in

$$\frac{d w_1}{d z_1} = \frac{d w_1}{d \lambda_1} \cdot \frac{d \lambda_1}{d z_1} = \frac{\frac{d \lambda_1}{d z_1}}{\frac{d \lambda_1}{d w_1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

und indem wir die im Zähler und Nenner stehenden Differentialquotienten $\frac{d \lambda_1}{d z_1}$ und $\frac{d \lambda_1}{d w_1}$ aus den Gl. (1) und (2) errechnen und in Gl. (11) einsetzen. Dadurch erhalten wir

$$\frac{d w_1}{d z_1} = \frac{q}{2 n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{z_1^2}}{w_1^{n-1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Der absolute Betrag dieses Differentialquotienten ergibt sich hieraus zu

$$\left| \frac{d w_1}{d z_1} \right| = \frac{q}{2 n} \cdot \varrho_1^{1-n} \cdot \frac{1}{r_1} \cdot \left( + \sqrt{r_1^2 - 2 \cdot \cos(2 \varphi_1) + \frac{1}{r_1^2}} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Setzen wir diesen Ausdruck, sowie den für $\chi_z$ erhaltenen Ausdruck (9) in (10) ein, so erhalten wir

$$\chi_w = \frac{m}{2} \cdot \ln \left[ \frac{r_1^2 - 1}{r_1^2} \cdot \frac{q}{2 n} \cdot \varrho_1^{1-n} \cdot \frac{1}{r_1} \cdot \left( + \sqrt{r_1^2 - 2 \cos(2 \varphi_1) + \frac{1}{r_1^2}} \right) \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

An diesem Ausdruck für die gesuchte Stromfunktion $\chi_w$ stört noch, daß er bis jetzt nicht einheitlich entweder in den Koordinaten der $z$-Ebene, oder in den Koordinaten der $w$-Ebene ausgedrückt ist. Wir erhalten nun den bei weitem einfacheren Ausdruck, wenn wir die Stromfunktion $\chi_w$ einheitlich in den Koordinaten der $z$-Ebene ausdrücken.

Zu dem Zweck müssen wir die in Gl. (14) noch vorkommende Koordinate $\varrho$ der $w$-Ebene durch die Koordinaten $r$ und $\varphi$ der $z$-Ebene ausdrücken. Dies gelingt am einfachsten dadurch, daß wir in unserer Abbildungsfunktion (3) Polarkoordinaten einführen. Dadurch erhalten wir

$$\varrho^n \cdot e^{i n \vartheta} = \frac{q}{2} \cdot \left( r \cdot e^{i \varphi} + \frac{1}{r} \cdot e^{-i \varphi} \right) + p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Hieraus erhalten wir durch Trennung von Reellem und Imaginärem die beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \varrho^n \cdot \sin(n \vartheta) &= \frac{q}{2} \cdot \sin \varphi \cdot \left( r - \frac{1}{r} \right), \\ \varrho^n \cdot \cos(n \vartheta) &= \frac{q}{2} \cdot \cos \varphi \cdot \left( r + \frac{1}{r} \right) + p \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Durch Quadrieren und Addieren dieser beiden Gleichungen erhalten wir den gewünschten Ausdruck

$$\varrho = \sqrt[2n]{\left[ \frac{q}{2} \cdot \sin \varphi \cdot \left( r - \frac{1}{r} \right) \right]^2 + \left[ \frac{q}{2} \cdot \cos \varphi \left( r + \frac{1}{r} \right) + p \right]^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Für spätere Zwecke sei noch vermerkt, daß wir durch Division der beiden Gl. (16) für $\vartheta$ den Ausdruck

$$\vartheta = \frac{1}{n} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{q}{2} \cdot \sin \varphi \left( r - \frac{1}{r} \right)}{\frac{q}{2} \cdot \cos \varphi \left( r + \frac{1}{r} \right) + p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

erhalten, der es uns gestattet, auch $\vartheta$ in den Polarkoordinaten der $z$-Ebene auszudrücken.

Durch Konstantsetzen des Ausdruckes für $\chi_w$ (Gl. 14) erhalten wir dann unter Berücksichtigung von Gl. (17) die in den Polarkoordinaten der $z$-Ebene ausgedrückte Gleichung der Wirbelbahnen in der $w$-Ebene des Schaufelsterns.

Um das erhaltene Resultat zu kontrollieren, wurde der Helmholtz-Kirchhoffsche Grundsatz auch noch zur unmittelbaren Berechnung der konjugierten Geschwindigkeit der Wirbel am Schaufelstern der $w$-Ebene benutzt. Hieraus konnte dann nach längeren Zwischenrechnungen die Differentialgleichung für die Wirbelbahnen in der $w$-Ebene, ausgedrückt in den Koordinaten der $z$-Ebene, ermittelt werden. Da die Integration dieser komplizierten Differentialgleichung auf zu große Schwierigkeiten stieß, wurde die Kontrollrechnung in der Weise zu Ende geführt, daß die soeben erhaltene Gleichung der Wirbelbahnen implizite differenziert wurde.

**6. Die Verdrängungsströmung, Vorbemerkungen.** Bisher haben wir die Gleichung der Wirbelbahnen am Schaufelstern der $w$-Ebene für den Fall des Fehlens einer Grundströmung abgeleitet. Es fehlt aber noch die Berücksichtigung derjenigen Strömung, die dem Betriebszustand einer Pumpe entspricht. Diese Strömung kann aus einzelnen Teilströmungen zusammengesetzt werden, für die sich in der Literatur die Bezeichnungen Verdrängungsströmung, Durchflußströmung und Zirkulationsströmung eingebürgert haben. Für diese Teilströmungen sollen in den folgenden Abschnitten die in den Koordinaten der $z$-Ebene ausgedrückten Stromfunktionen ermittelt werden. Wir erhalten dann die Gleichung der Wirbelbahnen in der $w$-Ebene beim Vorhandensein dieser Teilströmungen dadurch, daß wir diese Stromfunktionen zu der gleichfalls in den Koordinaten der $z$-Ebene ausgedrückten Routhschen Stromfunktion $\chi_w$ (Gl. 14) addieren und ihre Summe gleich einer Konstanten setzen.

Als erste der bereits von vornherein in der Pumpe vorhandenen Teilströmungen behandeln wir die Verdrängungsströmung, die durch die Rotation des Laufrades in der unendlichen Flüssigkeit hervorgerufen wird. Dabei ist zwischen der wirbelfreien, absoluten, nicht stationären, und der nicht wirbelfreien, relativen, stationären Verdrängungsströmung zu unterscheiden. Durch Addition der Stromfunktion der relativstationären Verdrängungsströmung zu der Routhschen Stromfunktion $\chi_w$ (Gl. 14) erhalten wir die Routhsche Stromfunktion für die relativen Wirbelbahnen am Schaufelstern beim Vorhandensein der Verdrängungsströmung. Dagegen erhalten wir durch Addition der Stromfunktion der absoluten Verdrängungsströmung zu der Routhschen Stromfunktion $\chi_w$ nicht etwa die Routhsche Stromfunktion der absoluten Wirbelbahnen, sondern lediglich die Routhsche Stromfunktion für das momentane Richtungsfeld der Absolutgeschwindigkeiten, mit denen sich die Wirbel an den verschiedenen Stellen des Feldes gerade weiterbewegen.

Die Ermittlung der während der Drehung des Schaufelrades durchlaufenen absoluten Wirbelbahnen ist wesentlich schwieriger, als die Ermittlung der relativen Wirbelbahnen; denn sie erfordert auch ein Studium des zeitlichen Ablaufs der Bewegungen auf den Wirbelbahnen. Wir werden uns daher in den folgenden Untersuchungen auf die Ermittlung der relativen Wirbelbahnen beschränken.

Die Ermittlung der absoluten Verdrängungsströmung ist im Sinne der Potentialtheorie ein Randwertproblem zweiter Art, dem die Randbedingung entspricht, daß an jeder Stelle der Schaufeloberfläche die senkrecht zur Kontur der Schaufel genommene Komponente der absoluten Strömungsgeschwindigkeit mit der in der gleichen Richtung genommenen Komponente der Umfangsgeschwindigkeit des betreffenden Punktes der Schaufeloberfläche übereinstimmt.

**7. Die Stromfunktion für die Verdrängungsströmung.** Wir setzen zunächst nach dem Vorbild von Spannhake, von dem der Gedankengang der folgenden Rechnung stammt, das komplexe Potential $F_{V\,\mathrm{abs}}(z)$ der absoluten Verdrängungsströmung in der $z$-Ebene des Einheitskreises für dessen Mittelpunkt als Laurent-Entwicklung an. Da nur das Kreisäußere dargestellt werden soll, kommen nur die fallenden Potenzen in Betracht. Wir setzen also

$$F_{V\,\mathrm{abs}}(z) = i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Diese Reihe konvergiert unbedingt und gleichmäßig.

Die in der Reihe auftretenden Koeffizienten $a_k$ müssen nun so bestimmt werden, daß die Randbedingungen der Aufgabe erfüllt werden, daß also an jeder Stelle der radialen Schaufeln, die entgegengesetzt dem Uhrzeiger mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ rotieren sollen, ihre senkrecht zum Radius gerichtete Umfangsgeschwindigkeit mit der in die gleiche

Richtung fallenden Komponenten der dort herrschenden Strömungsgeschwindigkeit übereinstimmt. Hieraus ergibt sich nach einigen Zwischenrechnungen die Bedingungsgleichung

$$-\frac{q\cdot\omega}{n}\cdot\frac{\sin\varphi}{(q\cdot\cos\varphi+p)^{\frac{n-2}{n}}}=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot a_k\cdot\sin(k\varphi)\quad\ldots\ldots\quad(20).$$

In dieser Gleichung haben wir jetzt die Bestimmungsgleichung für die in der Laurent-Reihe (19) auftretenden Koeffizienten $a_k$ gewonnen. Ihre Bestimmung erfolgt durch harmonische Analyse der auf ihrer linken Seite stehenden periodischen Funktion, die sich gemäß dieser Gleichung in eine Fouriersche Reihe entwickeln läßt. Da diese Funktion eine ungerade Funktion ist, treten in der Fourierschen Reihe nur Sinusglieder auf.

Nach Ausführung der harmonischen Analyse und einer für die graphisch-numerische Auswertung geeigneten Umformung erhalten wir für die $a_k$

$$a_k=-p^{\frac{2}{n}}\cdot\frac{\omega}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\left(1+\frac{q}{p}\cdot\cos\varphi\right)^{\frac{2}{n}}\cdot\cos(k\varphi)\,d\varphi\quad\ldots\ldots\quad(21).$$

Damit ist das durch Gl. (19) dargestellte komplexe Potential der absoluten Verdrängungsströmung bekannt. Durch Aufspalten in Real- und Imaginärteil erhalten wir dann hieraus die reelle Stromfunktion $\Psi_{V_{\text{abs}}}$ dieser Strömung, nämlich

$$\Psi_{V_{\text{abs}}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{r^k}\cdot\cos(k\varphi)\quad\ldots\ldots\quad(22).$$

Da wir aber aus dem im vorigen Abschnitt genannten Grunde für die Ermittlung der relativen Wirbelbahnen die reelle Stromfunktion $\Psi_{V_{\text{rel}}}$ der relativ-stationären Verdrängungsströmung benötigen, müssen wir zu der Stromfunktion $\Psi_{V_{\text{abs}}}$ noch die Stromfunktion $\Psi_{Dr}$ derjenigen Drehströmung addieren, welche durch den Übergang von einem raumfesten Koordinatensystem auf ein mit dem Kreiselrad rotierendes, also körperfestes Koordinatensystem zustande kommt. Es ist also

$$\Psi_{V_{\text{rel}}}=\Psi_{V_{\text{abs}}}+\Psi_{Dr}\quad\ldots\ldots\quad(23).$$

Da das Kreiselrad entgegen dem Uhrzeigersinn mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ rotiert, erhalten wir für die Stromfunktion $\Psi_{Dr}$ den Ausdruck

$$\Psi_{Dr}=\frac{1}{2}\omega\,\varrho^2\quad\ldots\ldots\quad(24).$$

Also lautet die reelle Stromfunktion der relativ-stationären Verdrängungsströmung

$$\Psi_{V_{\text{rel}}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{r^k}\cdot\cos(k\varphi)+\frac{1}{2}\omega\,\varrho^2\quad\ldots\ldots\quad(25).$$

**8. Die Stromfunktion für die Durchflußströmung.** Die Durchflußströmung rührt davon her, daß die Flüssigkeit der Pumpe in der Mitte durch ein Saugrohr mit anschließendem Leitapparat zugeführt werden muß. Bei dem von uns behandelten ebenen Problem ersetzen wir die Zuströmung durch eine im Drehpunkt gelegene Quelle. Die Wirkung des Leitapparates soll dadurch ersetzt werden, daß im Drehpunkt auch noch ein Wirbel angebracht wird, dessen Drehsinn mit dem Drehsinn des Laufrades übereinstimmt. Man bezeichnet eine solche Quelle, der ein Wirbel überlagert ist, als Wirbelquelle. Die in der Wirbelquelle entspringende Strömung würde bei ungestörtem Durchfluß nach logarithmischen Spiralen verlaufen. Wir wollen in diesem Abschnitt aber die Stromfunktion $\Psi_D$ derjenigen Strömung ermitteln, die in der Wirbelquelle entspringt und die ruhend zu denkenden Laufradschaufeln zirkulationslos umströmt. Diese Strömung pflegt man als Durchflußströmung zu bezeichnen.

Die gesuchte Stromfunktion $\Psi_D$ für die Durchflußströmung kann aus der Stromfunktion $\Psi_Q$ der nur von der Quelle herrührenden Strömung und der Stromfunktion $\Psi_W$ der nur vom Wirbel herrührenden Strömung gemäß der Gleichung

$$\Psi_D=\Psi_Q+\Psi_W\quad\ldots\ldots\quad(26)$$

zusammengesetzt werden. Für beide Strömungsanteile müssen die radialen Schaufelspuren zum System der Stromlinien gehören.

Diese Forderung ist für den ersten Strömungsanteil ohnehin erfüllt. Denn die radialen Schaufeln vermögen die radiale Quellströmung nicht zu stören. Die reelle Stromfunktion $\Psi_Q$

dieser Strömung kann daher sofort angeschrieben werden. Bezeichnen wir ihre Quellstärke mit $Q$, so lautet ihre reelle Stromfunktion

$$\Psi_Q = Q \cdot \vartheta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (27).$$

Um nun auch die reelle Stromfunktion für den zweiten Anteil der Durchflußströmung zu erhalten, gehen wir von der $z$-Ebene des Einheitskreises aus. Wir bringen dort in dem dem Punkt $w_0 = 0$ entsprechenden Punkt $z_0$ (Gl. 4) einen linksdrehenden Wirbel von der Stärke $\mu_i$ an. Wegen der Transformation $w = \sqrt[n]{\lambda}$ (Gl. 2), die eine Singularität im Punkt $w_0$ zur Folge hat, verwandelt sich dieser Wirbel bei der Abbildung in die $w$-Ebene in einen Wirbel von $n$-facher Stärke. Nach dem Vorbild von Gl. (5) können wir das komplexe Potential $F_W(z)$ der durch diesen Wirbel erzeugten Strömung um die Schaufeln, ausgedrückt in den Koordinaten der $z$-Ebene, sofort anschreiben. Es lautet

$$F_W(z) = \frac{\mu_i}{i} \cdot \ln \frac{(z - z_0) \cdot z}{z - \frac{1}{\bar{z}_0}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (28).$$

Um den zugehörigen Ausdruck für die reelle Stromfunktion zu erhalten, zerlegen wir diesen Ausdruck in Real- und Imaginärteil. Nach einigen Zwischenrechnungen ergibt sich unter Berücksichtigung von Gl. (4) die reelle Stromfunktion $\Psi_W$ der vom Wirbel herrührenden Strömung zu

$$\Psi_W = \frac{\mu_i}{2} \cdot \ln \frac{\left(r \cdot \cos\varphi + \frac{p}{q} - \sqrt{\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 1}\right)^2 + (r \cdot \sin\varphi)^2}{\left(r \cdot \cos\varphi + \frac{p}{q} + \sqrt{\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 1}\right)^2 + (r \cdot \sin\varphi)^2} - \mu_i \cdot \ln r \quad \ldots \quad (29).$$

**9. Die Stromfunktion für die Zirkulationsströmung um die Schaufeln.** Damit trotz des idealen Flüssigkeitscharakters Kraftwirkungen zwischen Schaufel und Fördermittel auftreten können, muß nach dem Kutta-Joukowskyschen Satz neben den bisher behandelten Teilströmungen auch noch das Bestehen von Zirkulationsströmungen um die Schaufeln angenommen werden. Der Drehsinn dieser Zirkulationen muß bei einer Zentrifugalpumpe mit dem Drehsinn des Laufrades übereinstimmen.

Das komplexe Potential der Zirkulationsströmung um die Schaufeln wird in der $z$-Ebene einfach dargestellt durch das komplexe Potential eines im Mittelpunkt des Einheitskreises angebrachten Wirbels. Bezeichnen wir die Stärke dieses Wirbels mit $\mu_s$, so hat die Zirkulation um jede der $n$ Schaufeln den Wert $\mu_s \cdot 2\pi$, da zum Mittelpunkt des Einheitskreises bei der Abbildung kein singulärer Punkt gehört. Der Drehsinn dieses Wirbels muß mit dem Drehsinn des Laufrades übereinstimmen, da derselbe bei der Abbildung erhalten bleibt.

Das komplexe Potential für die Zirkulationsströmung um die Schaufeln kann also einfach in der $z$-Ebene als das komplexe Potential $F_Z(z)$ eines linksdrehenden, im Mittelpunkt des Einheitskreises angebrachten Wirbels von der Stärke $\mu_s$ angesetzt werden. Es lautet

$$F_Z(z) = \frac{\mu_s}{i} \cdot \ln z \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (30).$$

Die zugehörige reelle Stromfunktion lautet

$$\Psi_Z = -\mu_s \cdot \ln r \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (31).$$

**10. Die Wirbelstärken $\mu_i$ und $\mu_s$ für tangentiales An- und Abströmen.** Die Wirbelstärken $\mu_i$ und $\mu_s$ sollen für die Berechnung der Wirbelbahnen so bemessen werden, daß die bekannten Bedingungen des tangentialen Anströmens an die Eintrittskanten und des tangentialen Abströmens von den Austrittskanten der Schaufeln ohne Mitberücksichtigung der vom Wirbelkranz herrührenden Strömung erfüllt sind.

Wenn nämlich diese Bedingungen unter Mitberücksichtigung der vom Wirbelkranz herrührenden Strömung erfüllt sein sollen, müssen die Wirbelstärken $\mu_i$ und $\mu_s$, und damit auch die zugehörigen Zirkulationen von der jeweiligen Lage der Wirbel, und somit auch von der Zeit abhängig sein. Dies führt aber auf einen Widerspruch, auf den Hamel[17]) aufmerksam gemacht hat. Wenn nämlich die Geschwindigkeitspotentiale $\Phi$ dieser Zirkulationsströmungen, die nicht eindeutig sind, auch von der Zeit abhängen, treten in der Bernoullischen Gleichung die entsprechenden Glieder $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ auf. Dieselben sind aber vieldeutig, und damit auch der Druck $p$, was nicht zulässig ist.

[17]) G. Hamel: a. a. O.[9]).

Hamel hat in der zitierten Arbeit ein anderes Beispiel behandelt, nämlich die Bewegung eines Wirbels um eine Buhne, bei dem er, ohne auf einen Widerspruch zu kommen, das Auftreten unendlicher Geschwindigkeiten an der Buhnenkante durch die Überlagerung einer parabolischen, von der jeweiligen Lage des Wirbels abhängigen Strömung vermeiden konnte. Es läßt sich nun zeigen, daß im Falle der Überlagerung einer solchen, von der Lage des Wirbels abhängigen Strömung eine Routhsche Stromfunktion für die zugehörigen Wirbelbahnen nicht mehr existiert. Diese Wirbelbahnen haben also einen anderen Charakter. Es bleibt deshalb in einem solchen Fall nichts anderes übrig, als nach dem Hamelschen Vorbild mittels des Helmholtz-Kirchhoffschen Grundsatzes die Differentialgleichung der Wirbelbahnen aufzustellen und zu integrieren. Formal ließe sich diese Rechnung auch bei unserer Aufgabe durchführen, wobei die Integration der Differentialgleichung, die eine recht komplizierte Form annimmt, allerdings auf graphisch-numerischem Wege erfolgen müßte.

Aus diesen Gründen sollen die Wirbelstärken $\mu_i$ und $\mu_s$ so bestimmt werden, daß die Bedingungen des tangentialen An- und Abströmens wenigstens dann erfüllt sind, wenn die vom Wirbelkranz hervorgerufene Strömung nicht vorhanden ist.

Zu dem Zweck gehen wir aus von dem komplexen Potential $F(z)$ derjenigen Strömung, die sich aus der absoluten Verdrängungsströmung, aus der vom Wirbel im Drehpunkt herrührenden Strömung und aus der Zirkulationsströmung um die Schaufeln zusammensetzt. Die radiale Quellströmung können wir hierbei auslassen, da dieselbe ohnehin bereits tangential an- und abströmt. Unter Berücksichtigung der Beziehungen (19), (28) und (30) haben wir also

$$F(z) = i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} + \frac{\mu_i}{i} \cdot \ln \frac{(z - z_0) \cdot z}{z - \frac{1}{\bar{z}_0}} + \frac{\mu_s}{i} \cdot \ln z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

Damit zwecks Erfüllung der Bedingungen des tangentialen An- und Abströmens die absoluten Strömungsgeschwindigkeiten an den Schaufelenden endlich sind, muß der Differentialquotient $\frac{dF(z)}{dz}$ für die den Schaufelendpunkten entsprechenden, auf dem Einheitskreis gelegenen Punkte $z = \pm 1$ verschwinden. Diese beiden Punkte müssen also Staupunkte für die Bildströmung werden. Dadurch erhalten wir zwei Bestimmungsgleichungen für die Wirbelstärken $\mu_i$ und $\mu_s$, die sich nach mehreren Umformungen auf die Formen

$$\left.\begin{aligned} \mu_i &= \frac{\omega}{n\pi} \cdot p^{\frac{2}{n}-1} \cdot \sqrt{p^2 - q^2} \cdot \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{q}{p} \cdot \cos\varphi\right)^{\frac{2}{n}-1} d\varphi\,, \\ \mu_s &= \frac{\omega}{n \cdot \pi} \cdot p^{\frac{2}{n}} \cdot \left\{ \frac{q}{p} \cdot \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{q}{p} \cdot \cos\varphi\right)^{\frac{2}{n}-1} \cdot \cos\varphi \, d\varphi \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^2}\right) \cdot \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{q}{p} \cdot \cos\varphi\right)^{\frac{2}{n}-1} d\varphi \right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

bringen lassen.

**11. Die Gleichung der Wirbelbahnen.** Wir können jetzt die Gleichung der relativen Wirbelbahnen aufstellen, die von den Kranzwirbeln am Schaufelstern der $w$-Ebene beim Vorhandensein der Verdrängungsströmung, der Durchflußströmung und der Zirkulationsströmung um die Schaufeln durchlaufen werden. Zu dem Zweck brauchen wir nur die Routhsche Stromfunktion $\chi_w$ (Gl. 14) und die gewöhnlichen Stromfunktionen $\Psi_{V\mathrm{rel}}$ (Gl. 25), $\Psi_Q$ (Gl. 27), $\Psi_W$ (Gl. 29) und $\Psi_Z$ (Gl. 31) zueinander zu addieren und ihre Summe gleich einer Konstanten $K$ zu setzen. Die Gleichung dieser Wirbelbahnen lautet also

$$\chi_w + \Psi_{V\mathrm{rel}} + \Psi_Q + \Psi_W + \Psi_Z = K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34).$$

Dabei muß auch den Koordinaten der überlagerten Teilströmungen der Index 1 gegeben werden. Die in dieser Gleichung auftretenden Koeffizienten $a_k$ sind durch den Ausdruck (21), und die Wirbelstärken $\mu_i$ und $\mu_s$ durch die beiden Ausdrücke (33) gegeben. Mittels der Beziehungen (17) und (18) kann diese Gleichung einheitlich in den Koordinaten der $z$-Ebene ausgedrückt werden.

Da es nicht möglich ist, Gl. (34) nach $r_1$ oder $\varphi_1$ aufzulösen, bedienen wir uns einer graphisch-numerischen Methode, um zunächst zu einer Aufzeichnung der Wirbelbahnen in der $z$-Ebene zu gelangen. Hier stellen sie aber nicht etwa die Wirbelbahnen am Einheitskreis

dar, sondern lediglich diejenigen Kurven, die durch konforme Abbildung in die $w$-Ebene in die gesuchten Wirbelbahnen am Schaufelstern übergehen.

Zur Übertragung dieser Kurven aus der $z$-Ebene in die $w$-Ebene bedienen wir uns zweier, durch konforme Abbildung auseinander hervorgehender Netze, die durch die orthogonalen Kurvenscharen $\varrho = \text{konst.}$ und $\vartheta = \text{konst.}$ gebildet werden. Während das in der $w$-Ebene gelegene Netz einfach aus Radien und konzentrischen Kreisen gebildet wird, erhalten wir die entsprechenden Kurvenscharen des Netzes in der $z$-Ebene durch Auswertung derjenigen Gleichungen, die sich aus den Gl. (17) und (18) durch Konstantsetzen von $\varrho$ und $\vartheta$ ergeben.

In den Bildern 2 und 3 sind die beiden, einander entsprechenden Netze der $w$-Ebene und der $z$-Ebene für die im folgenden Abschnitt behandelten Beispiele dargestellt worden.

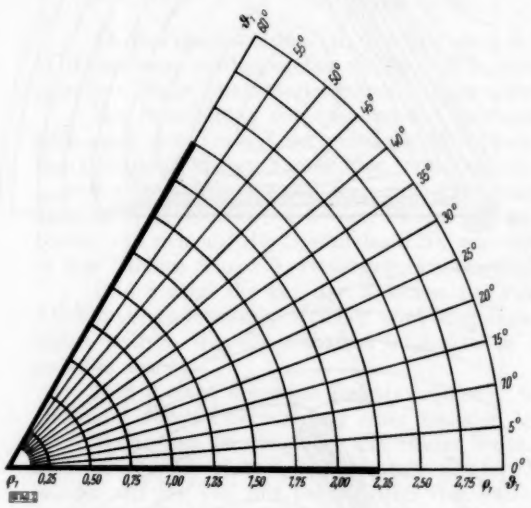



Bild 2.

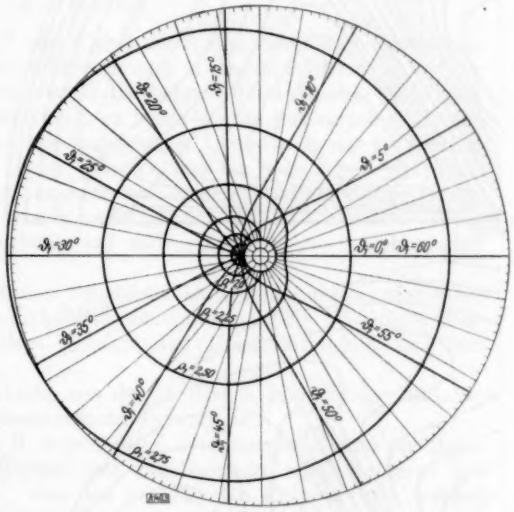



Bild 3.

**12. Einige Zahlenbeispiele.** Wir wollen nun mit Hilfe der abgeleiteten Beziehungen einige Zahlenbeispiele durchrechnen und sodann die zugehörigen Wirbelbahnen aufzeichnen. Aus der Vielzahl der Möglichkeiten wollen wir hierfür vier besonders charakteristische Fälle herausgreifen, die sich, um die umfangreichen Zahlenrechnungen in erträglichen Grenzen zu halten, alle auf den in der Mitte geschlossenen radialen Schaufelstern beziehen sollen. Wir haben also in den abgeleiteten Beziehungen $p = q$ zu setzen. Ferner sollen sich diese Fälle auf einen Schaufelstern mit $n = 6$ Schaufeln beziehen, deren Länge in der Weise festgelegt werden soll, daß $p = 64$ gesetzt wird. Endlich soll in diesen Fällen der Schaufelstern mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 1$ rotieren.

Hiermit ergaben sich der Innenradius $\varrho_i$ und der Außenradius $\varrho_a$ nach den Formeln $\varrho_i = \sqrt[n]{p-q}$ und $\varrho_a = \sqrt[n]{p+q}$ zu $\varrho_i = 0$ und $\varrho_a = 2{,}245$.

Ferner ergaben sich nach den Formeln (33) die Wirbelstärken $\mu_i$ und $\mu_s$ zu $\mu_i = 0$ und $\mu_s = 0{,}5989$.

Endlich ergaben sich nach Formel (21) die Koeffizienten $a_k$ der ersten sechs Glieder von Reihe (22) zu $a_1 = -0{,}899$, $a_2 = +0{,}258$, $a_3 = -0{,}125$, $a_4 = +0{,}080$, $a_5 = -0{,}055$, $a_6 = +0{,}040$. Für die Stromfunktion der absoluten Verdrängungsströmung erhalten wir unter Benutzung der ersten sechs Glieder dieser Reihe bereits einen für unsere Zwecke ausreichend genauen Ausdruck. Dabei ist die Abnahme der entsprechenden Glieder der Reihe im allgemeinen noch stärker, als es in der Abnahme der Koeffizienten $a_k$ zum Ausdruck kommt, da dieselben noch mit $\dfrac{\cos(k\varphi_1)}{r_1^k}$ multipliziert sind.

Aus der in der Gleichung der Wirbelbahnen noch vorkommenden Wirbelstärke $m$ der einzelnen Kranzwirbel, sowie aus der Quellstärke $Q$ der radialen Quellströmung sollen nun vier Wertenpaare so zusammengestellt werden, daß dadurch die eingangs erwähnten vier Fälle unterschieden und an Hand von Kurvenbildern möglichst klar herausgearbeitet werden können.

Zu dem Zweck treffen wir in den vier Fällen für $m$ und $Q$ die folgende Wahl:

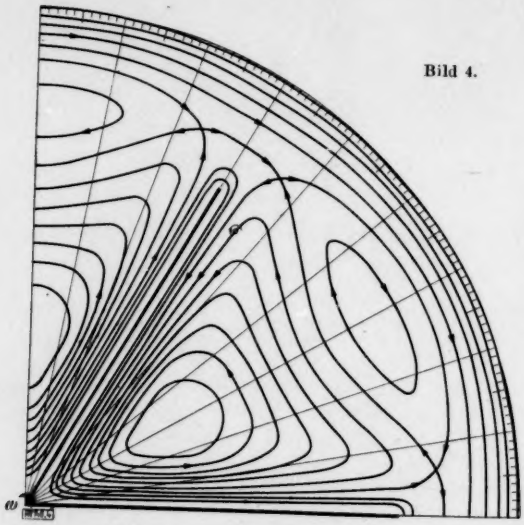


Bild 4.

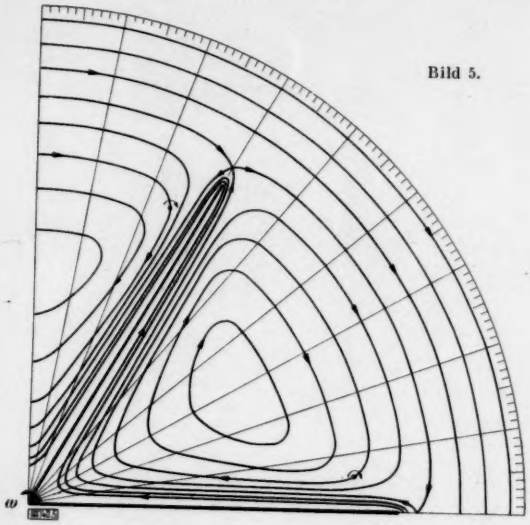


Bild 5.

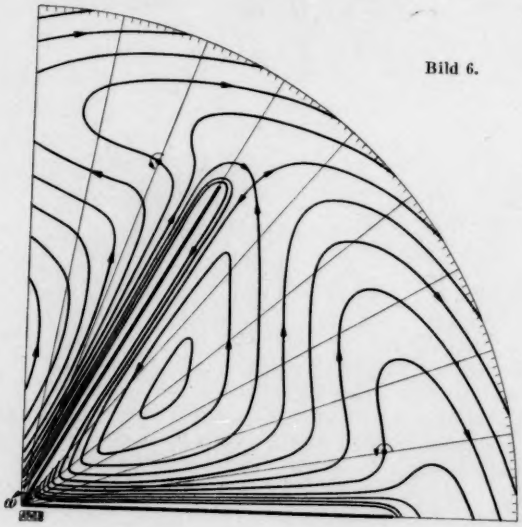


Bild 6.

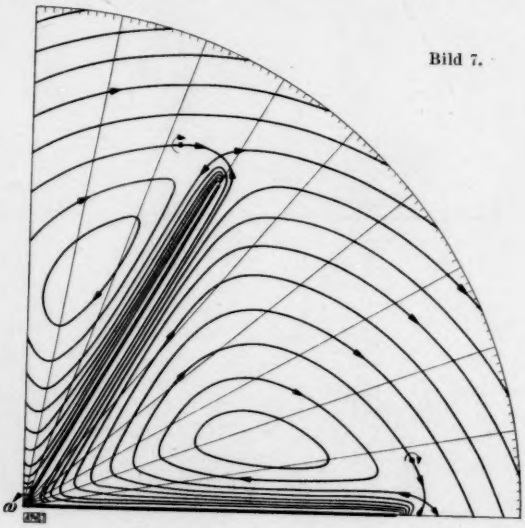


Bild 7.

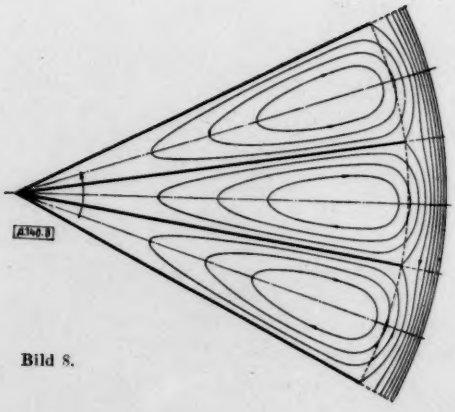


Bild 8.

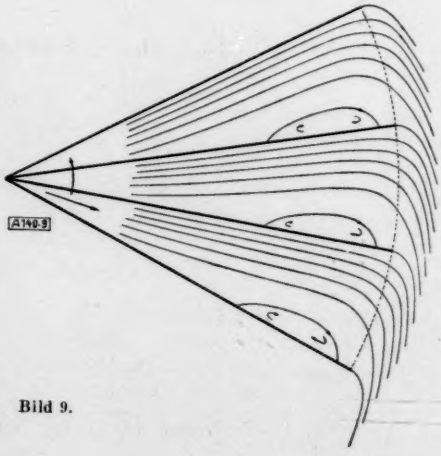


Bild 9.

$$1.\ m=+1, \quad Q=0;$$
$$2.\ m=-2, \quad Q=0;$$
$$3.\ m=+1, \quad Q=+\frac{1{,}8}{\pi};$$
$$4.\ m=-2, \quad Q=+\frac{10{,}8}{\pi}.$$

Um ein klares Bild der Wirbelbahnen in der $w$-Ebene zu erhalten, wählen wir die Differenzen $\Delta K$ zwischen den $K$-Werten je zweier aufeinander folgender Kurven in den vier Fällen wie folgt:

1. $\Delta K=0{,}05$; 3. $\Delta K=0{,}1$;
2. $\Delta K=0{,}5$; 4. $\Delta K=0{,}6$.

**13. Kurvendiskussion.** In den Bildern 4, 5, 6 und 7 sind die in den vier Fällen ermittelten Wirbelbahnen wiedergegeben worden. Wie man sieht, kommen in diesen Bildern die für die einzelnen Fälle charakteristischen Eigenschaften der Wirbelbahnen deutlich zum Ausdruck.

Zur Beurteilung der erhaltenen Kurvenscharen ist es wertvoll, in den einzelnen Fällen auch noch den Verlauf der relativen Stromlinien der zugehörigen Grundströmung zu kennen. Die Gleichung dieser Stromlinien erhalten wir ohne weiteres aus Gl. (34), wenn wir darin $\chi_w=0$ setzen. Wir können hier davon Gebrauch machen, daß diese Stromlinienbilder in den dann noch verbleibenden beiden Fällen bereits von Kucharski[18]) ermittelt wurden. Diese Bilder, die sich auf die Schaufelzahl 20, wie überhaupt auf andere Zahlenwerte beziehen, sind in den Bildern 8 und 9 wiedergegeben worden.

Bild 8 zeigt die bei der Rotation der radialen Schaufeln auftretende relativ-stationäre Verdrängungsströmung, welcher noch diejenige Zirkulationsströmung um die Schaufeln überlagert wurde, die die Schaufelendpunkte in dem gezeichneten Relativstrombild zu Staupunkten macht.

Bild 9 zeigt diejenige Relativströmung, welche aus der in Bild 8 dargestellten Relativströmung durch Überlagerung einer radialen Quellströmung hervorgeht.

Wenn nun in die durch die Bilder 8 und 9 dargestellten Strömungen einmal ein linksdrehender, und einmal ein rechtsdrehender Wirbelkranz hineingesetzt wird, kommen wir wieder auf die von uns behandelten vier Fälle. Von den betreffenden Kranzwirbeln werden dann Wirbelbahnen von der Art der in den Bildern 4 bis 7 dargestellten durchlaufen.

Der Vergleich von Bild 8 mit den ihm entsprechenden Bildern 4 und 5, sowie von Bild 9 mit den ihm entsprechenden Bildern 6 und 7 zeigt einerseits den ähnlichen Charakter der Kurvenscharen in größerer Entfernung vom Schaufelstern, sowie andererseits den verschiedenartigen Charakter in der Nähe des Schaufelsterns. In der näheren Umgebung des Drehpunktes zeigen die Wirbelbahnen eine auffallende Ähnlichkeit mit denjenigen bislang noch nicht veröffentlichten Wirbelbahnen, die Kucharski für den rotierenden radialen Schaufelstern mit vom Drehpunkt bis ins Unendliche reichenden Schaufeln für die gleichen Fälle und für die gleiche Schaufelzahl, aber für sonst andere Zahlenwerte gefunden hat.

Die genannten Ähnlichkeiten sind leicht zu verstehen. In einiger Entfernung vom Schaufelstern ist sein Einfluß auf das Aussehen der Wirbelbahnen bereits gering, und in größerer Entfernung findet so gut wie keine Beeinflussung mehr statt. Da die gegenseitige Beeinflussung der alsdann auf einen entsprechend großen Kreis verteilten Kranzwirbel dann auch nicht mehr ins Gewicht fällt, müssen die Wirbelbahnen dort praktisch mit den Stromlinien der überlagerten Relativströmung zusammenfallen. Die Wirbel werden dort einfach von der Strömung mitgenommen. Dagegen wird das Aussehen der Wirbelbahnen in der näheren Umgebung des Drehpunktes in erster Linie von den näher gelegenen Konturen beeinflußt. Es wird also für dieses Aussehen nicht viel ausmachen, ob die Schaufeln eine endliche Länge besitzen, oder ob sie bis ins Unendliche reichen.

Die Bilder 4 bis 7 lassen ferner erkennen, daß der Einfluß der Schaufeln auf das Aussehen der Wirbelbahnen in ihrer nächsten Umgebung den Einfluß der überlagerten Teilströmungen bei weitem überwiegt. Die große Dichte der Kurvenschar in nächster Nähe der Schaufeln ist kennzeichnend für die dort herrschenden großen Wirbelgeschwindigkeiten, die mit zunehmender Annäherung an die Schaufeln bekanntlich sogar dem Grenzwert „unendlich" zustreben.

Aus früheren Arbeiten[19]) ist ferner bekannt, daß ein in genügender Nähe einer Schaufel befindlicher Wirbel sich längs dieser Schaufel gerade in entgegengesetzter Richtung vorwärts bewegt, als ein mit dem Drehsinn des Wirbels an der Schaufel abrollendes Rad sich fort-

[18]) W. Kucharski: Strömungen einer reibungsfreien Flüssigkeit bei Rotation fester Körper. München und Berlin 1918, Bild 55 und 57.
[19]) Z. B. W. Kucharski: a. a. O. [2]).

bewegen würde, und daß die in der Nähe des Drehpunktes eines innen geschlossenen radialen Schaufelsterns gelegenen Wirbelbahnen hyperbelartig innerhalb eines jeden Sektors verlaufen. Auch ist aus der Kucharskischen Arbeit bekannt, daß diese Wirbelbahnen bei fehlender Quellströmung symmetrisch zum Mittelradius des Sektors verlaufen, wogegen dieselben durch Überlagerung einer Quellströmung je nach dem Drehsinn der Wirbel nach der einen oder anderen Seite verschoben werden.

Die Bilder 4 und 5 zeigen, daß bei fehlender Quellströmung die Wirbelbahnen in ihrer Gesamtheit symmetrisch zum Mittelradius des Sektors verlaufen. Dagegen zeigen die Bilder 6 und 7, daß bei vorhandener Quellströmung keine Symmetrie mehr vorhanden ist.

Es ist bemerkenswert, daß nach Überlagerung der radialen Quellströmung die Wirbelbahnen doch nicht im Ursprung der Quelle ihren Anfang zu nehmen scheinen. Wenn man aber die nicht geschlossenen Wirbelbahnen, auf denen sich die Wirbel nach außen hin endgültig vom Laufrad entfernen, in der entgegengesetzten Richtung zurückverfolgt, bemerkt man, daß dieselben sich immer näher und näher an den Schaufelstern heranschlängeln, so daß sie auf den Zeichnungen wegen der dort herrschenden großen Dichte der Wirbelbahnen sehr bald nicht weiter verfolgt werden können. Aus den Zeichnungen geht also nicht hervor, an welcher Stelle der Schaufelkontur sich die Wirbel ablösen. Die Beantwortung dieser Frage auf Grund unserer Zeichnungen würde aber ohnehin keinen Sinn haben, da sich dieselben auf eine reibungsfreie Flüssigkeit beziehen, in der die Entstehung von Wirbeln unmöglich ist.

Eine besondere Eigentümlichkeit der in den Bildern 4 bis 7 dargestellten Wirbelbahnen sind die zahlreichen relativen Ruhelagen der Wirbel. (Die Kreuzungspunkte zweier Wirbelbahnen sowie die isolierten „Mittelpunkte" der geschlossen umlaufenden Wirbelbahnen.) Die Beantwortung der Frage nach der Stabilität dieser Ruhelagen bereitet keine Schwierigkeiten mehr, nachdem die Wirbelbahnen in den betrachteten Fällen gezeichnet vorliegen. Einer Arbeit von Kneschke[20]), die sich mit den Ruhelagen von Wirbeln beschäftigt, können wir nämlich folgendes entnehmen:

Es gibt drei Arten von Ruhepunkten, nämlich Kreuzungspunkte, Rückkehrpunkte und isolierte Punkte.

Bezüglich dieser Ruhepunkte gelten die folgenden Sätze:

1. Kreuzungspunkte sind bedingt stabile Ruhepunkte.
2. Rückkehrpunkte sind bedingt stabile Ruhepunkte.
3. Isolierte Punkte sind stabile Ruhepunkte.

Da die in den Bildern 4 bis 7 vorhandenen Ruhepunkte Kreuzungspunkte und isolierte Punkte sind, haben wir es hier mit bedingt stabilen und stabilen Ruhelagen zu tun. Die stabilen Ruhelagen rühren zum Teil von den entsprechenden, aus den Bildern 8 und 9 zu ersehenden stabilen Ruhelagen der Grundströmung her.

Daß für den Wirbelkranz stabile Ruhelagen möglich sind, ist — besonders für die dem Betrieb als Pumpe entsprechenden Fälle (Bild 6 und 7) — ein wichtiges Resultat unserer Untersuchungen, denn die Wirbel können in solchen Lagen nicht von dem Schaufelrad loskommen. Da diese Ruhelagen relative Ruhelagen sind, rotiert der eine solche Ruhelage einnehmende Wirbelkranz mit dem Schaufelrad so, als ob er mit ihm fest verbunden wäre. Die sämtlichen Wirbel des Kranzes durchlaufen hierbei als absolute Bahn den gleichen Kreis.

Bei fehlender Quellströmung haben wir im Innern der Schaufelräume symmetrisch zu ihrer Mittellinie gelegene Bereiche geschlossener, relativer Wirbelbahnen um die zugehörigen stabilen relativen Ruhelagen (Bild 4 und 5). Diese Bereiche füllen nahezu die ganzen Schaufelräume aus.

Nach Überlagerung der Quellströmung werden diese Bereiche geschlossener Wirbelbahnen in den einzelnen Schaufelräumen an die Seite gedrängt und dabei verquetscht und verkleinert, wodurch an der anderen Seite eines jeden Schaufelraumes Platz für solche Wirbelbahnen geschaffen wird, auf denen die sich von den Schaufeln ablösenden Wirbel das Schaufelrad verlassen können (Bild 6 und 7).

**Zusammenfassung.** Es wurde die ebene Bewegung eines Wirbelkranzes an einem als Kreiselpumpe betriebenen radialen Schaufelstern von endlichen Schaufellängen unter der Voraussetzung untersucht, daß die Bedingungen des tangentialen An- und Abströmens ohne Mitberücksichtigung der vom Wirbelkranz herrührenden Strömung erfüllt sind. Mittels des Routhschen Verfahrens wurde die Gleichung der von den einzelnen Kranzwirbeln durchlaufenen relativen Wirbelbahnen aufgestellt. Diese Gleichung wurde dann für vier besonders charakteristische, sich auf den innen geschlossenen radialen Schaufelstern beziehende Fälle numerisch ausgewertet, und die zugehörigen relativen Wirbelbahnen wurden graphisch dargestellt. Die Ergebnisse, insbesondere auch die mit den Ruhepunkten zusammenhängenden Fragen, wurden sodann besprochen. 140

[20]) A. Kneschke: Über die Ruhelagen von Wirbeln. Z. angew. Math. Mech. Bd. 14 (1934), S. 178.

# Untersuchungen zur Verminderung störender Rüttelschwingungen an Kreiselgeräten.

Von *K. Magnus* in Göttingen.

Bericht des Institutes für angewandte Mechanik der Universität Göttingen[1]).

**1. Einleitung.** Jeder Kreisel besitzt restliche Unwuchten, die beim Lauf Zentrifugalmomente und damit störende Schwingungen hervorrufen. Es soll untersucht werden, wie die Trägheitsmomente eines Kreiselgerätes zu wählen sind, damit die durch die Zentrifugalmomente erregten Schwingungen möglichst klein bleiben.

Die Untersuchungen wurden angeregt durch das Verhalten eines Kreiselhorizontes, der in der Werkstatt des Institutes für angewandte Mechanik der Göttinger Universität hergestellt worden war. Der Horizont bestand aus einem elektrisch angetriebenen Kreisel mit senkrechter Drehachse, der durch Kardanringe Bewegungsfreiheit um die waagerechten Achsen bekam. Das System hatte eine geringe Schwerpunktstieferlage.

Obwohl der Kreisel bei fest eingespannter Kappe ruhig lief und nur die üblichen kritischen Drehzahlen zeigte, war der Lauf bei frei beweglich aufgehängter Kappe so unruhig, daß der Kreisel nicht auf volle Drehzahl gebracht werden konnte. Die überaus starken Rüttelschwingungen ließen eine Überbeanspruchung des Materials und damit eine Zerstörung des Apparates befürchten.

Man hat es hier offenbar mit erzwungenen Schwingungen des Kreiselpendels zu tun, deren erregende Kraft die durch restliche Wuchtfehler erzeugte umlaufende Zentrifugalkraft ist. Nun sind zwar die durch Unwuchten erzeugten Schwingungen sowie die damit zusammenhängende Selbsteinstellung elastischer Wellen in der Literatur sehr ausführlich behandelt worden[2]). Die meisten Verfasser rechnen jedoch, entsprechend ihrer etwas anderen Problemstellung, mit festen Lagern. Lediglich Den Hartog berücksichtigt die Nachgiebigkeit der Lager, nimmt jedoch deren Masse so groß an, daß die Kopplung mit den Lagermassen vernachlässigt werden kann.

Im folgenden soll nun das Problem für den speziellen Fall des Kreiselpendels behandelt werden. Der Kreisel soll mit elastischer Welle in einer Kappe liegen. Kreisel und Kappe erhalten durch Lagerung in einem Kardanring Bewegungsfreiheit um zwei zueinander senkrechte horizontale Achsen. Wenn der Kreisel läuft, so entstehen durch die vorhandenen Unwuchten Zentrifugalmomente. In der folgenden Rechnung wird nun ein durch die elastische Kreiselwelle gekoppeltes System von Kreiselkörper und den Massen des Kardangehänges betrachtet, das durch die Zentrifugalmomente zu erzwungenen Schwingungen erregt wird.

Die Untersuchungen werden zeigen, daß das Trägheitsmoment der Kreiselkappe eine bestimmte Größe haben muß, damit Resonanzerscheinungen mit der Eigenfrequenz der Nutation des Kreisels vermieden werden. Es bleibt jedoch stets die Resonanz mit der durch die elastische Welle verursachten Querschwingung des Kreiselkörpers bestehen.

**2. Die erregende Zentrifugalkraft.** Die die Schwingungen verursachenden Unwuchten können dynamischer oder statischer Natur sein. Statische Unwuchten, die durch einen kleinen Fehlerabstand des Schwerpunktes von der Drehachse hervorgerufen werden, sollen nicht berücksichtigt werden. Sie sind zudem bei technischen Kreiseln durch Auswuchten fast restlos beseitigt. Die durch statische Unwuchten bedingten Schwingungen sind in der Literatur ausführlich behandelt worden; sie sind im wesentlichen Translationsschwingungen, die sich den durch die dynamischen Unwuchten hervorgerufenen Drehschwingungen überlagern und so das durch die letzteren erzeugte Bild der Schwingungserscheinungen etwas verändern.

Die dynamischen Unwuchten sind durch einen Fehlerwinkel zwischen der Drehachse und der Hauptträgheitsachse gekennzeichnet. Die Größe der dadurch hervorgerufenen Zentrifugalmomente soll für einen symmetrischen Kreiselkörper bestimmt werden. Es sei in einem kreiselfesten Koordinatensystem $A$, $B$, $C$ die Achse $C$ die ausgezeichnete Hauptträgheitsachse. Sie bilde mit der Drehachse den Fehlerwinkel $\varepsilon$ (Bild 1). Die Achse $B$ sei senkrecht auf der durch Drehachse und Hauptträgheitsachse bestimmten Ebene. Dann können wir das Zentrifugalmoment aus den Eulerschen Gleichungen der Kreisellehre bestimmen. Diese lauten im allgemeinen Fall:

[1]) Diese Untersuchungen wurden auf Anregung von Herrn Prof. Schuler durchgeführt, dem auch an dieser Stelle für viele wertvolle Hinweise gedankt sei.

[2]) Z. B. Pöschl: Z. angew. Math. Mech. Bd. 3 (1923), S. 297. Karas: Ing.-Arch. Bd. 1 (1930), S. 84 und 158. Ferner die Bücher: Stodola: Dampfturbinen, 3. Aufl. Berlin 1905. Klein-Sommerfeld: Theorie des Kreisels, Heft IV, Leipzig 1910. Den Hartog: Mechanische Schwingungen, deutsch von G. Mesmer, Berlin 1936.

$$\Theta_A \dot{\omega}_A = (\Theta_B - \Theta_C)\,\omega_B\,\omega_C - Z_A,$$
$$\Theta_B \dot{\omega}_B = (\Theta_C - \Theta_A)\,\omega_C\,\omega_A - Z_B,$$
$$\Theta_C \dot{\omega}_C = (\Theta_A - \Theta_B)\,\omega_A\,\omega_B - Z_C.$$

Dabei sind $\Theta_A$, $\Theta_B$, $\Theta_C$ die Hauptträgheitsmomente, $Z_A$, $Z_B$, $Z_C$ die Zentrifugalmomente und $\omega_A$, $\omega_B$, $\omega_C$ die Komponenten der Drehgeschwindigkeit um die kreiselfesten Achsen $A$, $B$, $C$. Im vorliegenden Fall ist nun:

$$\dot{\omega}_A = \dot{\omega}_B = \dot{\omega}_C = 0,$$
$$\Theta_A = \Theta_B,$$
$$\omega_A = \omega \sin \varepsilon,$$
$$\omega_B = 0,$$
$$\omega_C = \omega \cos \varepsilon.$$

Damit ergibt sich:

$$Z_A = Z_C = 0,$$
$$Z_B = (\Theta_C - \Theta_A)\,\omega^2 \sin \varepsilon \cos \varepsilon.$$

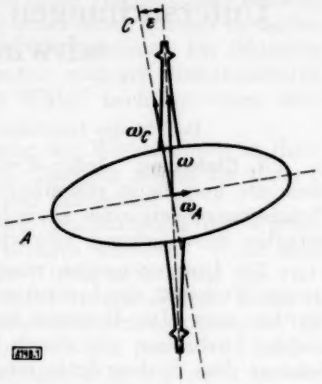



Bild 1. Zerlegung der Drehgeschwindigkeit am Kreisel.

Das Zentrifugalmoment wächst also mit dem Quadrat der Umlauffrequenz, es hat ein Maximum bei einem Fehlerwinkel von 45°. Da in unserem Fall jedoch nur kleine $\varepsilon$ vorkommen, so können wir für das Moment einfach schreiben:

$$Z_B = (\Theta_C - \Theta_A)\,\varepsilon\,\omega^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Da ferner das Zentrifugalmoment die Differenz der Trägheitsmomente als Faktor hat, so könnte man annehmen, daß für einen Kugelkreisel, d. h. für einen Kreisel mit kugelförmigem Trägheitsellipsoid, das Zentrifugalmoment verschwinden müßte. Dem widersprechen jedoch die Ergebnisse der Erfahrungen. Die weitere Rechnung wird nun auch die Erfahrungstatsachen theoretisch bestätigen. Es soll jedoch hier noch eine ganz allgemeine Bemerkung über den Fehlerwinkel $\varepsilon$ bzw. über das Zentrifugalmoment gemacht werden.

Bei einem Kugelkreisel ist jede Achse gleichberechtigt, jede Drehachse kann als Hauptträgheitsachse aufgefaßt werden. Die geringste Inhomogenität des Kreiselmaterials oder ganz unbedeutende Massenverlagerungen durch Verbeulen können nun bewirken, daß eine Achse als ausgezeichnete Hauptträgheitsachse erscheint, die mit der Drehachse einen beliebig großen Winkel einschließt. Andererseits wird dieselbe Inhomogenität bei einem stark abgeplatteten Kreisel nur eine geringfügige Verlagerung der Hauptträgheitsachse zur Folge haben. Da es also offensichtlich auf das Produkt $(\Theta_C - \Theta_A)\,\varepsilon$ ankommt, so soll dieses für eine vorgegebene Inhomogenität untersucht werden.

Das Trägheitsmoment des jetzt als fehlerfrei angenommenen symmetrischen Kreiselkörpers in einer beliebigen Richtung $a$ ist gegeben durch:

$$\Theta_K = \Theta'_A \cos^2 a + \Theta'_C \sin^2 a.$$

Die durch Materialfehler und schlechte Bearbeitung bewirkten Abweichungen von der idealen Massenverteilung im Kreiselkörper denken wir uns zu einem besonderen Körper zusammengefaßt, dessen Trägheitsellipsoid wir als symmetrisch annehmen wollen. Er habe die Hauptträgheitsmomente $\Theta_x$ und $\Theta_y$, deren Achsen gegenüber dem als fehlerlos angenommenen Kreiselkörper um den Winkel $\varphi$ verdreht sein sollen. Dann stellt sich das Fehlerträgheitsmoment in der Richtung $a$ dar durch:

$$\Theta_F = \Theta_x \cos^2 (a - \varphi) + \Theta_y \sin^2 (a - \varphi).$$

Um das Trägheitsellipsoid des wirklichen Kreiselkörpers zu bekommen, müssen wir $\Theta_K$ und $\Theta_F$ addieren.

$$\Theta_G = \Theta_K + \Theta_F = \Theta_A \cos^2 a + \Theta_C \sin^2 a + D \sin 2a. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

mit

$$\Theta_A = \Theta'_A + \Theta_x \cos^2 \varphi + \Theta_y \sin^2 \varphi,$$
$$\Theta_C = \Theta'_C + \Theta_x \sin^2 \varphi + \Theta_y \cos^2 \varphi,$$
$$D = \frac{1}{2}(\Theta_x - \Theta_y) \sin^2 \varphi.$$

$\Theta_A$ und $\Theta_C$ sind dabei die Trägheitsmomente des fehlerhaften Kreiselkörpers, $D$ ist eine nur von der Inhomogenität abhängige Konstante. Um nun die Hauptträgheitsachsen des wirklichen Kreiselkörpers zu finden, differenzieren wir (2) und bekommen:

$$\frac{d\,\Theta_G}{d\,a} = (\Theta_C - \Theta_A) \sin 2a + 2\,D \cos 2a.$$

Für eine Hauptträgheitsachse verschwindet dieser Ausdruck. $a$ gibt in diesem Fall die Abweichungen der Hauptträgheitsachsen von idealem und wirklichen Kreiselkörper, also den Fehlerwinkel $\varepsilon$ an. Man bekommt:

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon = \frac{2D}{(\Theta_A - \Theta_C)}.$$

Da wir $\varepsilon$ als klein vorausgesetzt hatten, so können wir die Tangente durch den Winkel ersetzen. Multipliziert man dann $\varepsilon$ noch mit dem im Zentrifugalmoment Gl. (1) vorkommenden Ausdruck $(\Theta_C - \Theta_A)$, so ergibt sich:

$$\frac{Z_B}{\omega^2} = (\Theta_C - \Theta_A)\,\varepsilon = -D = -\frac{1}{2}(\Theta_x - \Theta_y)\sin 2\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Das bedeutet also, daß das Zentrifugalmoment für eine vorgegebene Inhomogenität eine von der Form des Kreisels unabhängige Größe ist.

Die Gl. (3) zeigt ferner, weshalb für einen Kugelkreisel die Verhältnisse am ungünstigsten liegen. Beim Kugelkreisel ist es seiner Form wegen wahrscheinlicher als beim abgeplatteten oder beim verlängerten Kreisel, daß der Winkel $\varphi$ den Wert 45° erreicht, daß also der in Gl. (3) auf der rechten Seite stehende Ausdruck ein Maximum wird. Für den abgeplatteten Kreisel ist $\varphi > 45°$, für den verlängerten Kreisel ist $\varphi < 45°$ am wahrscheinlichsten.

Das für das körperfeste System abgeleitete Zentrifugalmoment (1) läuft vom raumfesten System aus gesehen mit der Drehgeschwindigkeit $\omega$ um. Wir wollen es in seine Komponenten in Richtung der raumfesten $x$- und $y$-Achsen, die der folgenden Rechnung zugrunde gelegt werden, zerlegen. Dabei können wir statt des Momentenpfeiles selbst dessen Projektion in der waagerechten Ebene nehmen, da nur kleine Winkelausschläge des Kreisels betrachtet werden sollen. Damit bekommen wir die Momentkomponenten:

$$Z_x = Z_B \sin \omega t,$$
$$Z_y = -Z_B \cos \omega t.$$

**3. Die Differentialgleichungen der erzwungenen Schwingungen des Kreiselpendels.** Wie schon erwähnt wurde, sollen nur kleine Auslenkungen des Kreiselpendels betrachtet werden. Wir können dann in einem raumfesten Koordinatensystem (Bild 2) die Bewegungen des Kreiselpendels durch die Föpplschen Gleichungen der Kreisellehre beschreiben[3]). Als äußere Momente haben wir darin zu setzen:

1. Das Schweremoment des Kreiselkörpers: $G_k s_k a_k$ ($G_k$ = Gewicht des Kreiselkörpers, $s_k$ = Abstand Schwerpunkt-Aufhängepunkt, $a_k$ = Auslenkung aus der Gleichgewichtslage).
2. Das durch die elastische Welle übertragene Kopplungsmoment zwischen Kreiselkörper und Kardangehänge.
3. Das Zentrifugalmoment.

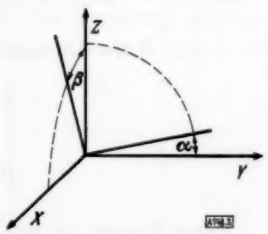


Bild 2. Koordinatensystem.

Zu den beiden Föppl-Gleichungen treten dann noch die Schwingungsgleichungen des Gehänges (Kreiselkappe und Kardanring), in denen als äußere Momente die Schweremomente $G_3 s_3 \alpha$ bzw. $G_4 s_4 \beta$ des Gehänges (ohne Kreisel!) in den beiden Ebenen sowie die Kopplungsmomente auftreten. Damit ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{I.} \quad \Theta_A \frac{d^2 a_k}{dt^2} + \Theta_C\,\omega \frac{d\beta_k}{dt} + G_k s_k a_k + c\,(a_k - a) = (\Theta_C - \Theta_A)\,\varepsilon\,\omega^2 \sin \omega t,\\
&\text{II.} \quad \Theta_A \frac{d^2 \beta_k}{dt^2} - \Theta_C \omega \frac{da_k}{dt} + G_k s_k \beta_k + c\,(\beta_k - \beta) = -(\Theta_C - \Theta_A)\,\varepsilon\,\omega^2 \cos \omega t,\\
&\text{III.} \quad \Theta_{x\,h} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + G_3 s_3 \alpha + c\,(\alpha - a_k) = 0,\\
&\text{IV.} \quad \Theta_{y\,h} \frac{d^2 \beta}{dt^2} + G_4 s_4 \beta + c\,(\beta - \beta_k) = 0
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (4).$$

[3]) Siehe Schuler: Die Föpplsche Methode zur Lösung von Kreiselproblemen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 15 (1935), S. 88 bis 91.

Dabei bedeuten:

$\Theta_C$ = Trägheitsmoment des Kreiselkörpers um seine Drehachse.
$\Theta_A$ = Trägheitsmoment des Kreiselkörpers um eine Querachse.
$\Theta_{xh}$ = Trägheitsmoment des Gehänges um die $x$-Achse.
$\Theta_{yh}$ = Trägheitsmoment des Gehänges um die $y$-Achse.
$G_k s_k$, $G_3 s_3$, $G_4 s_4$ die obengenannten Schweremomente.
$c$ = Kopplungskoeffizient der elastischen Kreiselwelle.
$\alpha$ = Auslenkung des Gehänges um die $x$-Achse.
$\beta$ = Auslenkung des Gehänges um die $y$-Achse.
$\alpha_k$ = Auslenkung der Hauptträgheitsachse des Kreiselkörpers um die $x$-Achse.
$\beta_k$ = Auslenkung der Hauptträgheitsachse des Kreiselkörpers um die $y$-Achse.

Im Differentialgleichungssystem (4) tritt uns ein Fall entgegen, in dem das in den Föppl-Gleichungen auftretende Moment nicht nur vom Winkel allein abhängig ist, sondern vom Winkel und von der Zeit $t$. Wir haben ein inhomogenes System vor uns, bei dem I mit II in den Geschwindigkeitsgliedern (durch die Kreiselkräfte), ferner I mit III und II mit IV in den Kraftgliedern (durch die elastische Welle) gekoppelt sind.

Bevor das Gleichungssystem (4) in voller Allgemeinheit behandelt wird, soll noch kurz auf den Fall der starren Kreiselwelle eingegangen werden.

**4. Betrachtung der Resonanzfunktionen für eine starre Welle.** Im Grenzfall $c=\infty$ wird $\alpha_k=\alpha$ und $\beta_k=\beta$, d. h. der Kreiselkörper macht dieselben Bewegungen wie die Kappe. Wir können dann im Gleichungssystem (4) die Gl. I mit III und II mit IV zusammenfassen und bekommen mit Einführung der Abkürzungen:

$\Theta_x = \Theta_A + \Theta_{xh}$ = Trägheitsmoment des Gesamtsystems (d. h. Kreisel und Gehänge!) um die $x$-Achse,
$\Theta_y = \Theta_A + \Theta_{yh}$ = Trägheitsmoment des Gesamtsystems um die $y$-Achse,
$G_1 s_1 = G_k s_k + G_3 s_3$ = Gesamtes Stabilitätsmoment um die $x$-Achse,
$G_2 s_2 = G_k s_k + G_4 s_4$ = Gesamtes Stabilitätsmoment um die $y$-Achse,

zwei Gleichungen, die mit Hilfe des Ansatzes

$$\alpha = A \sin \omega t,$$
$$\beta = B \cos \omega t$$

für $A$ und $B$ die Lösungen ergeben:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{(\Theta_A - \Theta_C)\,\varepsilon\,\omega^2\,[G_2 s_2 - (\Theta_y + \Theta_C)\,\omega^2]}{(G_1 s_1 - \Theta_x \omega^2)(G_2 s_2 - \Theta_y \omega^2) - \Theta_C^2\,\omega^4} \\ B &= \frac{(\Theta_C - \Theta_A)\,\varepsilon\,\omega^2\,[G_1 s_1 - (\Theta_x + \Theta_C)\,\omega^2]}{(G_1 s_1 - \Theta_x \omega^2)(G_2 s_2 - \Theta_y \omega^2) - \Theta_C^2\,\omega^4} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Der Nenner ist den beiden Resonanzfunktionen gemeinsam. Er ist eine quadratische Form in $\omega^2$, deren Nullstellen sich sofort angeben lassen. Es läßt sich zeigen, daß stets zwei reelle Lösungen für $\omega^2$ vorhanden sind, da die Diskriminante der quadratischen Form stets positiv ist. Das Vorzeichen dieser Lösungen wird durch den Quotienten:

$$Q = \frac{G_1 s_1\, G_2 s_2}{\Theta_x\, \Theta_y - \Theta_C^2}$$

bestimmt. Da aus Stabilitätsgründen $G_1 s_1$ und $G_2 s_2$ entweder beide positiv oder beide negativ sind, so ist das Produkt beider stets positiv. Das Vorzeichen von $Q$ wird also nur durch den Nenner bestimmt. Wir bekommen: Für

$$\mu^2 = \frac{\Theta_C^2}{\Theta_x\, \Theta_y} < 1$$

haben wir stets zwei reelle Lösungen für $\omega$, also zwei Unendlichkeitsstellen der Resonanzfunktion. Ist $\mu > 1$, so gibt es nur eine reelle Nullstelle für $\omega$. Im Grenzfall $\mu = 1$ rückt die zweite Nullstelle zu $\omega = \infty$.

Die Nullstellen der Resonanzfunktion lassen sich aus (5) sofort entnehmen. Sie liegen bei $\omega = 0$ sowie bei:

$$\omega = \sqrt{\frac{G_2 s_2}{\Theta_y + \Theta_C}} \quad \text{bzw.} \quad \omega = \sqrt{\frac{G_1 s_1}{\Theta_x + \Theta_y}}.$$

Der Verlauf der Resonanzfunktionen ist in Bild 3 für drei typische Werte von $\mu$ aufgetragen. Den Kurven sind die an dem vorgenannten Horizont gemessenen Werte zugrunde gelegt. Die Resonanzstellen treten im vorliegenden Fall schon bei sehr niedrigen $\omega$-Werten auf, so daß sie praktisch vollkommen ungefährlich sind, denn bei einer Umdrehung des Kreisels in $2\pi$ Sekunden sind die auftretenden Massenkräfte so gering, daß eine Beschädigung des Apparates ausgeschlossen ist. Jedoch können die Resonanzstellen bei entsprechend stärkerer Fesselung des Kreisels auch wesentlich höher rutschen, wie man aus (5) sofort entnehmen kann.

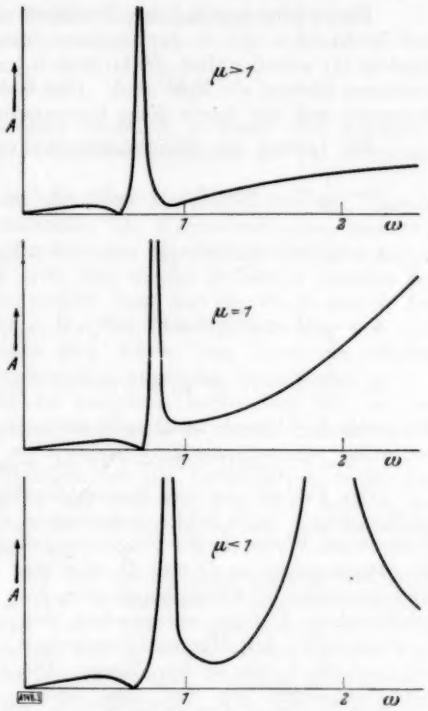


Bild 3. Resonanzfunktion bei starrer Kreiselwelle für verschiedene Werte von $\mu$.

Von Bedeutung ist noch der Grenzwert, dem die Resonanzkurven für wachsendes $\omega$ zustreben. Man bekommt z. B. für $A_\infty$:

$$A_\infty = \frac{(\Theta_C - \Theta_A)\,\varepsilon\,(\Theta_C + \Theta_y)}{\Theta_x\,\Theta_y - \Theta_C^2}.$$

Der Grenzwert ist um so kleiner, je weiter wir vom Kugelkreisel entfernt sind, d. h. je mehr das Trägheitsellipsoid des Systemes Kreiselkörper + Kappe von der Kugelgestalt abweicht. Im Sonderfall $\Theta_C^2 = \Theta_x\,\Theta_y$ bzw. $\mu = 1$ hat die Resonanzfunktion für große $\omega$ Parabeleigenschaften, sie geht also mit $\omega \to \infty$ gegen Unendlich. Das ist klar, wenn man bedenkt, daß dann die Umlauffrequenz stets gleich der Nutationsfrequenz ist. Dieser Fall muß also vermieden werden. Es zeigt sich jedoch, daß das Verhalten der Resonanzfunktion für große $\omega$-Werte durch die Elastizität der Kreiselwelle ganz erheblich beeinflußt wird.

**5. Die Resonanzfunktion für eine elastische Welle.** Wir kehren nun zum Gleichungssystem (4) zurück und führen dort dimensionslose Größen ein, um der Rechnung größere Allgemeinheit zu verleihen. Wir nennen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\Theta_A}{c} = \frac{1}{\nu^2}; \qquad \frac{\omega}{\nu} = \gamma; \\ &\frac{G_k s_k}{c} = a_1; \quad \frac{G_3 s_3}{c} = a_2; \quad \frac{G_4 s_4}{c} = a_3; \\ &\frac{\Theta_C}{\Theta_A} = \delta; \quad \frac{\Theta_{yh}}{\Theta_A} = \mu_1; \quad \frac{\Theta_{xh}}{\Theta_A} = \mu_2 = \mu_1 + \mu_r \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Dabei ist $\nu$ die Eigenfrequenz der Drehschwingung des Kreiselkörpers um eine Querachse bei fest eingespannten Lagern. $\gamma$ ist als dimensionslose Frequenzgröße ein Maß für die Umlauffrequenz des Kreisels. Das Trägheitsmoment der Hängung um die $x$-Achse setzt sich zusammen aus dem Trägheitsmoment der Kreiselkappe und dem Trägheitsmoment des äußeren Kardanringes. Nimmt man, was meist der Fall ist, die Kappe als symmetrisch an, so kann man $\mu_2$ zerlegen in $\mu_1 + \mu_r$, wobei $\mu_r$ das Verhältnis des Trägheitsmomentes des Kardanringes zu $\Theta_A$ bedeutet.

Mit diesen Beziehungen und dem Ansatz:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= A \sin \omega t, & \alpha &= C \sin \omega t, \\ \beta_k &= B \cos \omega t, & \beta &= D \cos \omega t \end{aligned}$$

bekommt man für die gesuchten Amplitudenfunktionen $A$, $B$, $C$, $D$ das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} A(1 + a_1 - \gamma^2) - C - B\,\delta\,\gamma^2 &= (1 - \delta)\,\varepsilon\,\gamma^2 \\ -A\,\delta\,\gamma^2 + B(1 + a_1 - \gamma^2) - D &= -(1 - \delta)\,\varepsilon\,\gamma^2 \\ -A + C(1 + a_2 - \mu_2\,\gamma^2) &= 0 \\ -B + D(1 + a_3 - \mu_1\,\gamma^2) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

XUM

Da es hier nur auf das Verhalten der Resonanzfunktionen für große $\omega$ ankommt, d. h. auf Drehzahlen, die in der Größenordnung der Betriebsdrehzahlen liegen, so können wir im System (7) unbedenklich die Größen $a_1$, $a_2$, $a_3$ vernachlässigen, da sie um etwa zwei Zehnerpotenzen kleiner als Eins sind. Das bedeutet praktisch eine Vernachlässigung der Schweremomente und der durch diese hervorgerufenen langsamen Präzessionen.

Die Lösung des Gleichungssystemes (7) ist:

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{1}{N}(1-\delta)\,\varepsilon\,[\gamma^2\mu_1(1+\delta)-(1+\mu_1+\delta)] \\ D &= \frac{1}{N}(\delta-1)\,\varepsilon\,[\gamma^2\mu_2(1+\delta)-(1+\mu_2+\delta)] \end{aligned}\right\}\ \text{für die Kappe,}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{N}(1-\delta)\,\varepsilon\,[\gamma^2\mu_1(1+\delta)-(1+\mu_1+\delta)]\,(1-\mu_2\gamma^2) = (1-\mu_2\gamma^2)\,C \\ B &= \frac{1}{N}(\delta-1)\,\varepsilon\,[\gamma^2\mu_2(1+\delta)-(1+\mu_2+\delta)]\,(1-\mu_1\gamma^2) = (1-\mu_1\gamma^2)\,D \end{aligned}\right\}\ \text{für den Kreisel} \qquad \text{(8).}$$

Dabei ist der Nenner $N$ allen Resonanzfunktionen gemeinsam:

$$N = \gamma^4\mu_1\mu_2(1-\delta^2)+\gamma^2[\delta^2(\mu_1+\mu_2)-2\mu_1\mu_2-\mu_1-\mu_2]+1+\mu_1+\mu_2+\mu_1\mu_2-\delta^2.$$

Der Verlauf der vier Resonanzfunktionen in Abhängigkeit von der dimensionslosen Umlauffrequenz $\gamma$ ist in Bild 4 aufgetragen, der Rechnung sind die an dem ausgeführten Horizont gemessenen Werte für die Trägheitsmomente zugrunde gelegt. Die ausgezogenen Kurven stellen die Resonanzkurven $C$ und $D$, also die Auslenkungen der Kreiselkappe dar, die gestrichelten Kurven entsprechen den Auslenkungen der Hauptträgheitsachse des Kreisels in den beiden Ebenen. Die Betriebsdrehzahl lag bei dem untersuchten Gerät etwa bei $\gamma = 3$, also oberhalb der Resonanzstellen. Der Kreisel muß also beim Anlaufen diese Stellen durchlaufen. Dabei ist eine Resonanzstelle um so gefährlicher, je breiter sie ist, denn eine um so längere Zeit braucht der Kreisel, um sie zu durchlaufen. Es kann sogar der Fall eintreten, daß die Drehgeschwindigkeit nicht über den Wert einer solchen kritischen Drehzahl gesteigert werden kann, nämlich dann, wenn alle von außen durch den Antrieb in das System hineingesteckte Energie durch das Anfachen der Rüttelschwingungen verbraucht wird, so daß dann keine Energie zum Steigern der Drehzahl mehr übrigbleibt. Ein solcher Fall hat bei dem beschriebenen Horizontmodell tatsächlich vorgelegen, denn es gelang zwar ohne Schwierigkeit, den Kreisel bei festgehaltener Kappe auf Betriebsdrehzahl zu bringen, doch bei frei hängendem System war ein Steigern der Drehzahl nicht möglich, wollte man nicht das Gerät zerstören.

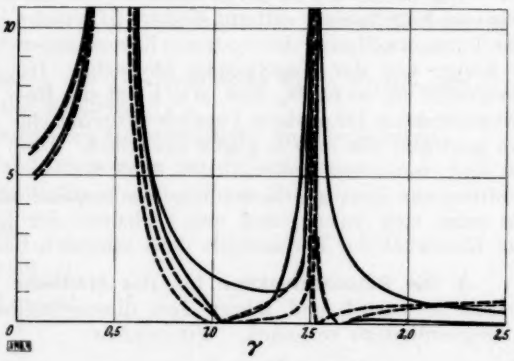


Bild 4. Resonanzfunktionen für Kreiselkörper und Kreiselkappe.

An den Resonanzkurven des Bildes 4 interessieren uns

1. die Nullstellen,
2. die Unendlichkeitsstellen,
3. die Grenzwerte, denen die Resonanzfunktionen für große $\omega$ zustreben, denn diese entsprechen etwa den Werten der Resonanzfunktionen für die Betriebsdrehzahlen.

Die Nullstellen lassen sich aus den Gl. (8) sofort angeben. Wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \text{für } C\text{:}\ \gamma_0^2 &= \frac{1}{1+\delta}+\frac{1}{\mu_1} \\ \text{für } D\text{:}\ \gamma_0^2 &= \frac{1}{1+\delta}+\frac{1}{\mu_2} \end{aligned}\right\}\ \text{für die Kappe,}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{für } A\text{:}\ \gamma_0^2 &= \frac{1}{1+\delta}+\frac{1}{\mu_1} \quad \text{und} \quad \gamma_0^2 = \frac{1}{\mu_2} \\ \text{für } B\text{:}\ \gamma_0^2 &= \frac{1}{1+\delta}+\frac{1}{\mu_2} \quad \text{und} \quad \gamma_0^2 = \frac{1}{\mu_1} \end{aligned}\right\}\ \text{für den Kreisel} \qquad \text{(9).}$$

Die Unendlichkeitsstellen ergeben sich aus den Nullstellen des Nenners von (8):

$$\gamma_\infty^2 = \frac{1}{2\mu_1} + \frac{1}{2\mu_2} + \frac{1}{1+\delta} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\mu_1} - \frac{1}{2\mu_2}\right)^2 + \frac{\delta^2}{(1-\delta^2)^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Da sich der Radikand als Summe zweier Quadrate darstellt, so kann eine komplexe Lösung für $\gamma_\infty^2$ nicht vorkommen; dagegen können imaginäre Lösungen für $\gamma_\infty$ auftreten, wenn $\gamma_\infty^2$ negativ wird.

Es sei nun die Frage vorgelegt: Wie kann man die Lage der Nullstellen und Unendlichkeitsstellen so beeinflussen, daß sich die Eigenschaften des Kreiselverbandes bessern? Man könnte zunächst eine Nullstelle der Resonanzfunktion in die Betriebsdrehzahl legen. Das ist jedoch aus zwei Gründen abwegig. Einmal tritt eine solche Nullstelle niemals bei allen vier Resonanzfunktionen gleichzeitig auf. Das ersieht man aus (9), da ja wegen des endlichen Trägheitsmomentes des Kardanringes stets $\mu_1 \neq \mu_2$ ist. Man könnte also nur eine Beruhigung jeweils in einer Ebene erzielen. Zweitens aber würde man durch ein solches Höherlegen der Nullstellen die Lage der Unendlichkeitsstellen ungünstig beeinflussen.

Man wird versuchen, die Unendlichkeitsstellen zu kleineren Drehzahlen hin zu verschieben, um sie auf diese Weise ungefährlicher zu machen. Das kann durch Verändern von Trägheitsmomenten geschehen. Man kann entweder am Kardanring Zusatzgewichte anbringen und damit $\mu_r$ vergrößern, oder man kann das Trägheitsmoment der Kreiselkappe durch Anbringen von Zusatzgewichten vergrößern; damit wird $\mu_1$ und wegen $\mu_2 = \mu_1 + \mu_r$ auch $\mu_2$ geändert. Den Kreisel selbst wollen wir zunächst als gegeben betrachten, so daß eine Änderung seiner Trägheitsmomente vorläufig ausgeschlossen sein soll.

Bild 5 zeigt die Verschiebung der Nullstellen und der Unendlichkeitsstellen mit einer Vergrößerung von $\mu_r$. ($N_A$ bedeutet Nullstelle von $A$ usw. $U$ bedeutet Unendlichkeitsstelle.) Dabei ist zu beachten, daß gemäß Gl. (9) die Nullstellen von $C$ bzw. $D$ gleichzeitig Nullstellen von $A$ bzw. $B$ sind. Bild 5 zeigt, daß die Vergrößerung von $\mu_r$ wenig Einfluß auf die Verschiebung der Nullstellen sowie der oberen Unendlichkeitsstelle hat. Dagegen verschwindet die untere Unendlichkeitsstelle für $\mu_r$ größer als etwa 1,2 vollkommen, d. h. der Nenner von Gl. (8) hat für größere $\mu_r$ nur noch eine reelle Nullstelle.

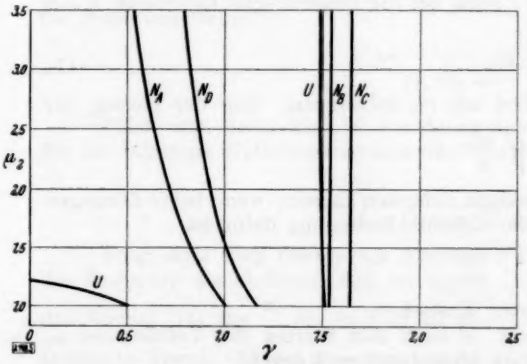



Bild 5.

Bild 5. Verschiebung der Nullstellen und Unendlichkeitsstellen der Resonanzfunktion mit einer Vergrößerung des Kardanringes.

Bild 6. Verschiebung der Nullstellen und Unendlichkeitsstellen der Resonanzfunktion mit einer Vergrößerung der Kreiselkappe.

Bild 7. Resonanzfunktionen für Kreiselkörper und Kreiselkappe für größeres Trägheitsmoment der Kappe.

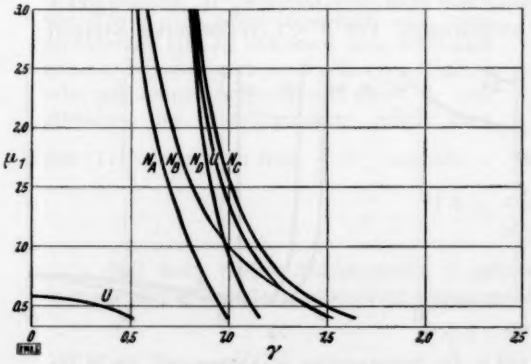



Bild 6.

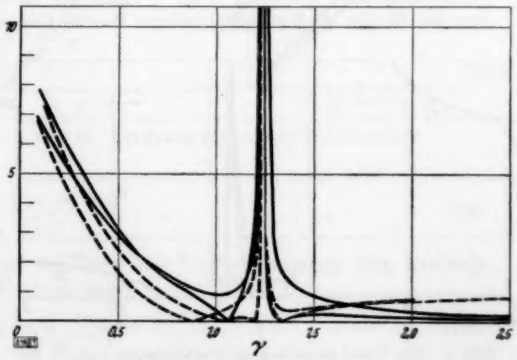



Bild 7.

Bringt man die Zusatzgewichte nicht am Kardanring, sondern an der Kreiselkappe selbst an, so ändern sich die Verhältnisse nach Bild 6. Man sieht durch Vergleich mit Bild 5, daß das Anbringen der Zusatzgewichte an der Kappe sehr viel mehr Einfluß auf die Verschiebung der Null- und Unendlichkeitsstellen hat, als das Vergrößern des Kardanringes. Auch hier verschwindet die untere Unendlichkeitsstelle für genügend großes $\mu_1$.

Die durch ihre Breite gefährliche untere Resonanzstelle in Bild 4 kann also durch geeignete Wahl der Trägheitsmomente fortgeschafft werden. An dem untersuchten Horizont wurden die dazu notwendigen rechnerisch ermittelten Zusatzgewichte an der Kappe angebracht. Der Versuch zeigte die Richtigkeit der Überlegungen. Der Kreisel ließ sich ohne jede Schwierigkeit auf seine Betriebsdrehzahl bringen und zeigte keinerlei anormales Verhalten. Der Verlauf der vier Resonanzfunktionen für die nunmehr veränderten Werte der Trägheitsmomente ist in Bild 7 aufgetragen. Durch Vergleich mit Bild 4 sieht man, welche Verbesserung erzielt ist. Es tritt nur noch die obere sehr schmale Resonanzstelle auf. Allerdings nehmen die Resonanzkurven für kleines $\gamma$ ziemlich große Werte an. Das ist aber ungefährlich, da der Kreisel beim Anlaufen dieses Gebiet sehr schnell durchläuft und die Drehenergie noch gering ist. Die Versuche haben auch, vor allem beim Auslauf, merkliche aber ungefährliche Schwingungen gezeigt.

Schließlich sollen noch die Grenzwerte der Resonanzfunktionen für große $\gamma$ betrachtet werden. An den Gl. (8) kann man diese ablesen. Die Auslenkungen der Kappe ($C$ und $D$) gehen für $\gamma \to \infty$ gegen Null. Die Kappe bleibt also ruhig stehen. Dagegen gehen die beiden Resonanzfunktionen $A$ und $B$ gegen den endlichen Grenzwert $\varepsilon$, gleichgültig wie groß die Verhältniswerte $\delta$, $\mu_1$ und $\mu_2$ sind. Das bedeutet eine Dauerauslenkung um den Wert $\varepsilon$, also eine Verbiegung der Kreiselachse derart, daß die Hauptträgheitsachse mit der Drehachse zusammenfällt. Die Selbsteinstellung der elastischen Kreiselwelle wird also durch die Rechnung bestätigt. Diese Tatsache beweist noch einmal, weshalb ein Kreiselkörper mit kugelförmigem Trägheitsellipsoid ungünstiger ist, als ein solcher mit abgeplattetem Trägheitsellipsoid. Denn für einen gegebenen Materialfehler ist der dadurch entstehende Fehlerwinkel $\varepsilon$ zwischen Symmetrieachse und Hauptträgheitsachse für einen Kugelkreisel am größten, es werden also auch für ihn die Resonanzfunktionen $A$ und $B$ maximale Werte annehmen.

Welche Bedingungen zwischen $\delta$, $\mu_1$ und $\mu_2$ ziehen nun das Vorhandensein von nur einer reellen Nullstelle des Nenners nach sich? Dazu sei die quadratische Gleichung $N=0$ (Gl. (8)) näher betrachtet. Diese hat die Form:

$$\gamma^4 + a\,\gamma^2 + b = 0 \,. \qquad (11).$$

Die Koeffizienten $a$ und $b$ lassen sich sofort aus (8) entnehmen. Aus der Lösung der Gl. (11):

$$\gamma^2 = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

sieht man, daß zwei reelle Wurzelpaare für $\gamma$ nur dann auftreten können, wenn beide Lösungen für $\gamma^2$ positiv reell werden. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist

$$a < 0; \quad b > 0.$$

Diese Bedingung ist erfüllt für:

1. $\delta^2 < 1$; das entspricht dem verlängerten Kreisel.
2. $\delta^2 > 1 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_1\mu_2$; das entspricht, je nach den Werten der Verhältnisse $\mu_1$ und $\mu_2$, einem mehr oder weniger stark abgeplattetem Kreisel.

Um diese Verhältnisse besser überblicken zu können, sollen sie an einem Kurvenbild veranschaulicht werden. Bild 8 zeigt die Abszissen der Resonanzstellen $\gamma_R$ in Abhängigkeit von der Größe $\delta^2$ für verschiedene Werte von $\mu_2$ aufgetragen. Für $\delta^2 < 1$ (verlängerter Kreisel)

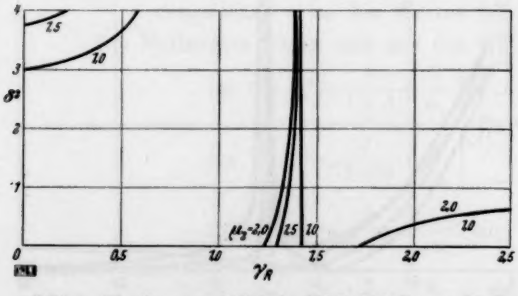



Bild 8. Die Resonanzstellen in Abhängigkeit von $\delta^2$ für verschiedene Werte von $\mu_2$.

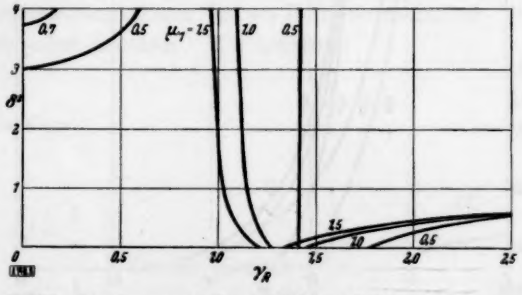



Bild 9. Die Resonanzstellen in Abhängigkeit von $\delta^2$ für verschiedene Werte von $\mu_1$.

treten zwei Wurzeln auf, deren Lage sich mit einer Veränderung von $\mu_2$ nur unwesentlich ändert. Die obere Nullstelle liegt jedoch sehr ungünstig, da sie in die Nähe der Betriebsdrehzahl kommen kann. Ein verlängerter Kreisel kommt deshalb für die Konstruktion derartiger Kreiselgeräte nicht in Frage. Für den abgeplatteten Kreisel gibt es ein Gebiet, in dem nur eine reelle Wurzel auftritt, die ihre Lage sowohl mit $\delta^2$ als auch mit $\mu_2$ nur wenig ändert. Für den stark abgeplatteten Kreisel treten dann wieder zwei reelle Wurzeln auf, von denen eine jedoch durch entsprechende Wahl von $\mu_2$ ganz zum Verschwinden gebracht werden kann. Der größte Wert, den $\delta^2$ erreichen kann, ist bekanntlich $\delta^2 = 4$. Das entspricht dem ebenen Kreisel. Für den bei den Versuchen benutzten Kreisel (von Anschütz & Co., Kiel) war $\delta^2 = 3{,}43$ gemessen worden.

Das entsprechende Schaubild für verschiedene Werte von $\mu_1$ zeigt Bild 9 (d. h. Anbringen der Zusatzgewichte an der Kreiselkappe statt am Kardanring). Wieder haben wir für den verlängerten Kreisel zwei sehr ungünstig liegende Wurzeln. Für $\delta^2 > 1$ zunächst nur eine reelle Wurzel, die sich mit $\delta^2$ fast nicht verschiebt, aber durch Vergrößern von $\mu_1$ zu kleineren $\gamma$-Werten verschoben werden kann. Der Fall des sehr stark abgeplatteten Kreisels bringt wieder das Auftreten einer weiteren reellen Wurzel, die aber durch Vergrößerung von $\mu_1$ fortgeschafft werden kann.

Aus diesen Betrachtungen kann man ersehen:

1. Der verlängerte Kreisel ist ungünstig.
2. Es muß die Bedingung

$$1 < \delta^2 < 1 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_1 \mu_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

erfüllt sein. Da es aus zuvor klargestellten Gründen zweckmäßig ist, $\delta^2$ möglichst groß zu wählen, so muß man durch eine entsprechende Vergrößerung von $\mu$ die Bedingung (12) erfüllen. Bemerkenswert ist, daß die Elastizität der Kreiselwelle in der Bedingung (12) überhaupt nicht auftritt.

Im vorliegenden Fall läßt sich eine sehr anschauliche Deutung der Tatsache geben, daß es durch geeignete Wahl der Trägheitsmomente gelingt, eine Resonanzstelle zum Verschwinden zu bringen. Die untere Resonanzstelle entsteht durch die Übereinstimmung von Umlauffrequenz und Nutationsfrequenz des Kreisels. Das soll näher erklärt werden.

Für die Nutationsfrequenz eines Kreisels mit elastischer Welle gilt für großen Impuls die Näherungsformel[4]):

$$n^2 = \frac{\Theta_C^2 \omega^2}{\Theta_x \Theta_y + \dfrac{\Theta_C^2 \omega^2}{c} (\Theta_y h + \Theta_x h)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Führt man darin die hier benutzten dimensionslosen Bezeichnungen ein, so ergibt sich für die bezogene Nutationsfrequenz der Wert:

$$\left(\frac{n}{\nu}\right)^2 = \frac{\delta^2 \gamma^2}{(1+\mu_1)(1+\mu_2) + \delta^2 \gamma^2 (\mu_1 + \mu_2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Trägt man sich über $\gamma$ als Abszisse die Frequenz als Ordinate auf, so ergibt die Formel (14) für $\frac{n}{\nu}$ die in Bild 10 gezeichnete Kurve. Es ist dies im wesentlichen eine Gerade, die für große $\gamma$-Werte etwas abbiegt. Trägt man sich noch dazu die Kurve der Kreiseldrehzahl, also eine 45°-Gerade ein, so bekommt man entweder einen Schnittpunkt beider Kurven (Fall a) oder gar keinen Schnittpunkt (Fall b). Die Abszisse des Schnittpunktes erhält man aus (14), wenn man dort $\frac{n}{\nu} = \gamma$ ansetzt:

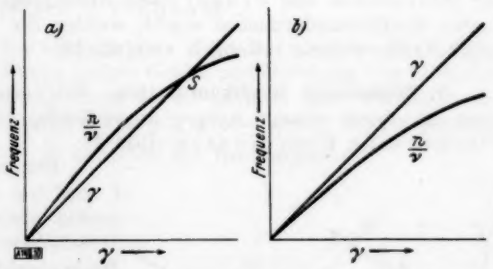



Bild 10. Erklärung der unteren Resonanzstelle.

$$\gamma^2 = -\frac{1 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_1 \mu_2 - \delta^2}{\delta^2 (\mu_1 + \mu_2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Soll kein reeller Schnittpunkt $S$ auftreten, soll also die Umlauffrequenz des Kreisels niemals mit der Nutationsfrequenz zusammenfallen, so muß

$$\delta^2 < 1 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_1 \mu_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

[4]) Siehe Magnus: Schwingungen kraftgekoppelter Kreisel. Ing.-Arch. Bd. 9 (1938), S. 178 bis 204.

XUM

gelten. Das deckt sich aber vollständig mit der zuvor abgeleiteten Bedingung Gl. (12). Im Diagramm (Bild 10) bedeutet das, daß die anfängliche Steilheit der $\frac{n}{\nu}$-Kurve kleiner als 45° sein soll, denn nur dann ist bei dem vorliegenden Kurventyp kein Schnittpunkt möglich.

**6. Zusammenfassung.** Jeder Kreisel besitzt restliche Unwuchten, die beim Lauf Zentrifugalmomente hervorrufen. Es ist untersucht worden, wie die Trägheitsmomente eines Kreiselgerätes zu wählen sind, damit die durch die Zentrifugalmomente erregten Schwingungen möglichst klein bleiben. Damit keine Resonanz von Kreiseldrehung und Nutationsfrequenz auftritt, muß zwischen den Trägheitsmomenten des Kreiselkörpers und denen der kardanischen Hängung die Beziehung (12) erfüllt sein. Diese Bedingung besagt, daß das Trägheitsmoment der Hängung eine bestimmte Mindestgröße haben muß. Ist das nicht der Fall, so kann man die Bedingung durch Vergrößerung der Trägheitsmomente der Hängung nachträglich befriedigen. Dabei ist ein Vergrößern des Trägheitsmomentes der Kreiselkappe wirksamer, als ein Vergrößern des Trägheitsmomentes des Kardanringes.

Die Resonanzkurve eines Kreiselgerätes mit elastischer Kreiselwelle behält mindestens eine Unendlichkeitsstelle, die bei Übereinstimmung der durch die elastische Welle verursachten Querschwingung mit der Umlauffrequenz des Kreisels auftritt. Ihre Lage wird durch die Wirkung der Kreiselkräfte etwas verschoben.

Der verlängerte Kreisel ist ungünstig, da für ihn eine meist sehr hoch liegende zweite Resonanzstelle auftritt. Aber auch Kreiselkörper mit kugelförmigem Trägheitsellipsoid sind unbrauchbar, da für sie die wahrscheinliche Größe des durch Herstellungsfehler hervorgerufenen Fehlerwinkels zwischen Symmetrieachse und Hauptträgheitsachse am größten ist. Dieser Fehlerwinkel ist aber für den Lauf oberhalb der kritischen Drehzahl maßgebend.

Das günstigste Trägheitsmomentenverhältnis für einen symmetrischen Kreiselkörper liegt etwa bei $\sqrt{2}$ und ist unabhängig von der Elastizität der Kreiselwelle. 148

# Graphische Statik räumlicher Kräftesysteme mit Hilfe der dualen Kräfteabbildung.

Von *Robert Sauer* in Aachen.

Unter einer projektiven Kräfteabbildung[1]) versteht man eine ebene oder räumliche Abbildung von Kräften, bei der die Wirkungslinien aller Kräfte projektiv transformiert werden und jedes Gleichgewichtssystem wieder in ein Gleichgewichtssystem übergeht. In der vorliegenden Arbeit wird eine besonders einfache projektive Kräfteabbildung, die duale Kräfteabbildung, eingeführt und zur Lösung der Grundaufgaben der graphischen Statik räumlicher Kräftesysteme benutzt. Dabei zeigt sich, daß die duale Abbildung die früher von R. v. Mises[2]) und von W. Prager[3]) angegebenen Abbildungen in einer besonderen Weise miteinander verknüpft, indem die Kraftvektoren eines Bündels nach v. Mises und die Momentvektoren eines Bündels nach Prager transformiert werden. Durch diese Verkoppelung der Misesschen und Pragerschen Abbildungen, die sich zwangsläufig aus dem Begriff der dualen Kräftetransformation ergibt, werden die Konstruktionen der graphischen Statik räumlicher Kräftesysteme erheblich vereinfacht.

**1. Plückersche Kraftkoordinaten.** Wir erinnern zunächst an die bekannte Darstellung einer an einem starren Körper angreifenden Kraft (eines „linienflüchtigen" Vektors) durch Plückersche Koordinaten (Bild 1):

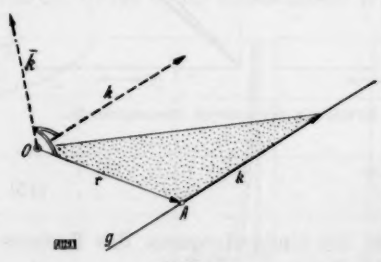


Bild 1.

Der in der Wirkungslinie $g$ angreifende Kraftvektor $\mathfrak{k}$ wird bei Annahme eines festen Nullpunktes $O$ in eindeutig bestimmter Weise ersetzt durch den nach $O$ parallel verschobenen Kraftvektor $\mathfrak{k}$ und das Kräftepaar mit dem Momentvektor

$$\bar{\mathfrak{k}} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

den wir ebenfalls von $O$ aus antragen wollen; $\mathfrak{r}$ ist der Ortsvektor eines beliebigen Punktes $A$ der Wirkungslinie $g$. Die $2 \times 3$ Koordinaten der Vektoren $\mathfrak{k}, \bar{\mathfrak{k}}$ in einem rechtwinkeligen Koordinatensystem mit $O$ als Nullpunkt, nämlich $k_1, k_2, k_3, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$, nennen wir die Plücker-

[1]) R. Sauer: Math. Ann. Bd. 110 (1934), S. 464 bis 472 u. Z. angew. Math. Mech. Bd. 14 (1934), S. 193 bis 198.
[2]) Z. Math. u. Phys. Bd. 64 (1917), S. 209 bis 232 u. Z. angew. Math. Mech. Bd. 4 (1924), S. 212.
[3]) Z. angew. Math. Mech. Bd. 16 (1926), S. 341 bis 355.

schen Koordinaten der gegebenen Kraft und fassen sie im Symbol

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{k}, \bar{\mathfrak{k}} = k_1, k_2, k_3, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$$

zusammen.

Die Plückerschen Koordinaten sind an die aus (1) folgende notwendige Bedingung

$$0 = \mathfrak{k}\,\bar{\mathfrak{k}} = k_1 \bar{k}_1 + k_2 \bar{k}_2 + k_3 \bar{k}_3 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

gebunden. Im übrigen aber sind sie willkürlich vorgebbar, d. h. irgend 6 Zahlen, die nicht alle verschwinden und der Nebenbedingungen (2) genügen, bestimmen stets genau eine Kraft $\mathfrak{K}$ als Plückersche Koordinaten.

Sonderfälle:

a) $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}, 0$ (d. h. Momentvektor $\bar{\mathfrak{p}} = 0$) stellt eine Kraft dar, deren Wirkungslinie $g$ durch den Nullpunkt $O$ geht.

b) $\mathfrak{M} = 0, \bar{\mathfrak{m}}$ (d. h. Kraftvektor $\mathfrak{m} = 0$) stellt ein Kräftepaar dar mit dem Momentvektor $\bar{\mathfrak{m}}$. Als Wirkungslinie betrachten wir in diesem Fall die unendlich ferne Schnittgerade der zu $\bar{\mathfrak{m}}$ senkrechten Parallelebenenschar.

**2. Definition der dualen Kräfteabbildung.** Wir definieren die duale Kräfteabbildung durch die Gleichungen

$$k'_1 = k_1, \quad k'_2 = k_2, \quad k'_3 = \bar{k}_3, \quad \bar{k}'_1 = c\,\bar{k}_1, \quad \bar{k}'_2 = c\,\bar{k}_2, \quad \bar{k}'_3 = c\,k_3 \,(c \neq 0) \ldots \quad (3).$$

Sie ordnet jeder Kraft $\mathfrak{K} = \mathfrak{k}, \bar{\mathfrak{k}}$ mit den Koordinaten $k_i, \bar{k}_i$ umkehrbar eindeutig eine Bildkraft $\mathfrak{K}' = \mathfrak{k}', \bar{\mathfrak{k}}'$ mit den Koordinaten $k'_i, \bar{k}'_i$ zu; denn wenn die $k_i, \bar{k}_i$ Kraftkoordinaten sind und daher die Bedingung (2) erfüllen, gilt nach (3) auch

$$\mathfrak{k}'\,\bar{\mathfrak{k}}' = k'_1 \bar{k}'_1 + k'_2 \bar{k}'_2 + k'_3 \bar{k}'_3 = c\,(k_1 \bar{k}_1 + k_2 \bar{k}_2 + \bar{k}_3 k_3) = c\,\mathfrak{k}\,\bar{\mathfrak{k}} = 0\,,$$

d. h. auch die $k'_i, \bar{k}'_i$ sind Kraftkoordinaten. Der Faktor $c$ in (3) ist eine beliebige nichtverschwindende Konstante, die je nach den Maßverhältnissen der vorliegenden Aufgabe zweckmäßig gewählt werden kann.

Für das Folgende genügt es, die geometrische Bedeutung der dualen Kräfteabbildung nur für die beiden Sonderfälle a) und b) der Nr. 1 anzugeben:

a) Kräfte $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}, 0$ des Bündels $O$.

Aus $\bar{\mathfrak{p}} = 0$, d. h. $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \bar{p}_3 = 0$ und aus (3) folgt für die Bildkraft $\mathfrak{P}' = \mathfrak{p}', \bar{\mathfrak{p}}'$:

$$p'_1 = p_1, \quad p'_2 = p_2, \quad \bar{p}'_3 = c\,p_3; \qquad p'_3 = \bar{p}'_1 = \bar{p}'_2 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Wegen $\bar{p}'_1 = \bar{p}'_2 = 0$ liegt der Momentvektor $\bar{\mathfrak{p}}'$ der Bildkraft in der $Z$-Achse und demnach die Wirkungslinie $g'$ des Bildkraftvektors $\mathfrak{p}'$ in der $XY$-Ebene. Wir haben damit den Satz:

> Die duale Kräfteabbildung transformiert die Kräfte $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}, 0$, d. h. sämtliche Kräfte des Raums, deren Wirkungslinien $g$ den Punkt $O$ enthalten, in die Kräfte $\mathfrak{P}' = \mathfrak{p}', \bar{\mathfrak{p}}'$, deren Wirkungslinien $g'$ in der $XY$-Ebene liegen (= Kräftefeld der $XY$-Ebene).

Außerdem ergibt sich aus (4) folgende Konstruktion der Bildkraft $\mathfrak{P}'$ (Bild 2): Der Grundriß des Kraftvektors $\mathfrak{p}$ in der $XY$-Ebene liefert Größe und Richtung des Bildkraftvektors $\mathfrak{p}'$. Die Wirkungslinie $g'$ des Bildkraftvektors $\mathfrak{p}'$ ist parallel zum Grundriß der Wirkungslinie $g$ der gegebenen Kraft im Abstand $OG' = c \operatorname{tg} \varphi$ ($\varphi$ = spitzer Neigungswinkel von $g$ gegen die $XY$-Ebene). Die Vektoren $\overrightarrow{OG'}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}$ bilden ein Rechtssystem.

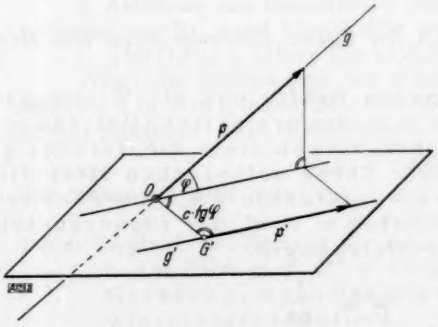
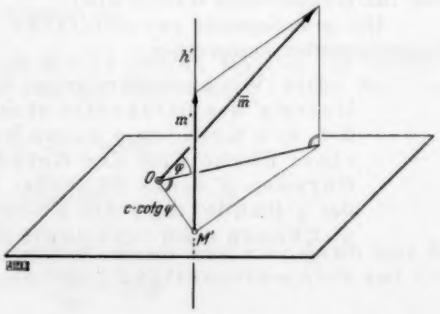



Bild 2 (links).

Bild 3 (rechts).



Die Wirkungslinie $g'$ der Bildkraft hat hiernach die Gleichung

$$p_2 x - p_1 y - c p_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Ausnahmefall:

Die Kräfte $\mathfrak{P}$ mit der $Z$-Achse als Wirkungslinie $\left(p_1 = p_2 = 0,\ \varphi = \pm \frac{\pi}{2}\right)$ bilden sich wegen $p'_1 = p'_2 = p'_3 = 0$ ab in die Kräftepaare $\mathfrak{P}'$ der $XZ$-Ebene; die $z$-Koordinate $p_3$ der gegebenen Kraft $\mathfrak{P}$ bestimmt das Moment $\overline{p}'_3 = c\, p_3$ des Bildkräftepaars $\mathfrak{P}'$.

b) Kräftepaare $\mathfrak{M} = 0, \overline{\mathfrak{m}}$.

Aus $\mathfrak{m} = 0$, d. h. $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ und aus (3) folgt für die Bildkraft $\mathfrak{M}' = \mathfrak{m}', \overline{\mathfrak{m}}'$:

$$\overline{m}'_1 = c\, \overline{m}_1, \quad \overline{m}'_2 = c\, \overline{m}_2, \quad m'_3 = \overline{m}_3; \qquad m'_1 = m'_2 = \overline{m}'_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Wegen $m'_1 = m'_2 = 0$ steht der Bildkraftvektor $\mathfrak{m}'$ senkrecht auf der $XY$-Ebene und wir haben damit den Satz:

> Die duale Kräfteabbildung transformiert die Kräfte $\mathfrak{M} = 0, \overline{\mathfrak{m}}$, d. h. sämtliche Kräftepaare des Raums, in die Kräfte $\mathfrak{M}' = \mathfrak{m}', \overline{\mathfrak{m}}'$, deren Wirkungslinien $h'$, senkrecht auf der $XY$-Ebene stehen (= Parallelkräftebündel senkrecht zur $XY$-Ebene).

Außerdem ergibt sich aus (6) folgende Konstruktion der Bildkraft $\mathfrak{M}'$ (Bild 3): Die $z$-Komponente des Momentvektors $\overline{\mathfrak{m}}$ liefert Größe und Richtung des Bildkraftvektors $\mathfrak{m}'$. Die Wirkungslinie $h'$ des Bildkraftvektors $\mathfrak{m}'$ ist parallel zur $Z$-Achse im Abstand $OM' = c \cdot \operatorname{ctg} \varphi$ ($\varphi$ = spitzer Neigungswinkel von $\overline{\mathfrak{m}}$ gegen die $XY$-Ebene). $OM'$ ist senkrecht zur Ebene des Neigungswinkels $\varphi$ und die Vektoren $\overrightarrow{OM'}, \overline{\mathfrak{m}}, \mathfrak{m}'$ bilden ein Rechtssystem.

Der Spurpunkt $M'$ der Wirkungslinie $h'$ der Bildkraft hat hiernach die Koordinaten

$$x_{M'} = -c \frac{\overline{m}_2}{\overline{m}_3}, \qquad y_{M'} = +c \frac{\overline{m}_1}{\overline{m}_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Ausnahmefall:

Die Kräftepaare $\mathfrak{M}$ mit den Momentvektoren $\overline{\mathfrak{m}}$ in der $XY$-Ebene ($\overline{m}_3 = \varphi = 0$) bilden sich wegen $m'_1 = m'_2 = m'_3 = 0$ ab in die Kräftepaare $\mathfrak{M}'$ mit den zu $\overline{\mathfrak{m}}$ parallelen Momentvektoren $\overline{\mathfrak{m}}' = c\, \overline{\mathfrak{m}}$.

Die Abbildungen eines Vektorbündels $O$ nach a) in ein ebenes Vektorfeld und nach b) in ein Parallelvektorbündel wurden schon von R. v. Mises[2]) und von W. Prager[3]) benutzt. Wir werden darauf in Nr. 4 zurückkommen.

**3. Eigenschaften der dualen Kräfteabbildung.** Ehe wir zeigen, wie sich die duale Kräfteabbildung für die Konstruktionen der graphischen Statik räumlicher Kräftesysteme verwerten läßt, stellen wir hier die wichtigsten Eigenschaften der dualen Kräfteabbildung zusammen.

Die grundlegende mechanische Eigenschaft, auf der die praktische Verwendbarkeit der dualen Kräfteabbildung beruht, bringt folgender Satz zum Ausdruck:

> Jedem Gleichgewichtssystem $\mathfrak{K}_\mathrm{I}, \mathfrak{K}_\mathrm{II}, \ldots, \mathfrak{K}_N$ eines starren Körpers entspricht bei der dualen Kräfteabbildung wieder ein Gleichgewichtssystem $\mathfrak{K}'_\mathrm{I}, \mathfrak{K}'_\mathrm{II}, \ldots, \mathfrak{K}'_N$ und umgekehrt.

Beweis: Die Gleichgewichtsbedingungen

$$\mathfrak{k}_\mathrm{I} + \mathfrak{k}_\mathrm{II} + \cdots + \mathfrak{k}_N = 0, \qquad \overline{\mathfrak{k}}_\mathrm{I} + \overline{\mathfrak{k}}_\mathrm{II} + \cdots + \overline{\mathfrak{k}}_N = 0$$

des gegebenen Kräftesystems werden durch (3) in die Gleichgewichtsbedingungen

$$\mathfrak{k}'_\mathrm{I} + \mathfrak{k}'_\mathrm{II} + \cdots + \mathfrak{k}'_N = 0, \qquad \overline{\mathfrak{k}}'_\mathrm{I} + \overline{\mathfrak{k}}'_\mathrm{II} + \cdots + \overline{\mathfrak{k}}'_N = 0$$

des Bildkräftesystems transformiert.

Die grundlegende geometrische Eigenschaft der dualen Kräfteabbildung läßt sich folgendermaßen aussprechen:

> Die Wirkungslinien $g$ der gegebenen Kräfte und die Wirkungslinien $g'$ der Bildkräfte stehen in einer dualen projektiven Beziehung, d. h. den Geraden $g$ eines Bündels entsprechen stets die Geraden $g'$ einer Ebene und den Geraden $g$ einer Ebene entsprechen stets die Geraden $g'$ eines Bündels. Die Punktkoordinaten $x, y, z$ der Scheitel der $g$-Bündel und die Ebenenkoordinaten $u', v', w'$, der zugeordneten $g'$-Ebenen sind verknüpft durch die Gleichungen

$$u' = -\frac{y}{cz}, \qquad v' = \frac{x}{cz}, \qquad w' = -\frac{1}{cz}.$$

Da dieser Satz nur theoretisches Interesse hat und im folgenden nicht benutzt wird, wollen wir auf die Angabe des Beweises, der einige liniengeometrische Vorkenntnisse erfordert, verzichten. Wir beschränken uns darauf, den Satz an den beiden Sonderfällen a) und b) von Nr. 2 zu bestätigen:

a) Das Geradenbündel mit dem Scheitel $O$ wird in die $XY$-Ebene abgebildet.

b) Die Geraden der unendlich fernen Ebene (= Wirkungslinien der Kräftepaare des Raums) werden in das Parallelgeradenbündel mit dem unendlich fernen Punkt der $Z$-Achse als Scheitel transformiert.

Wie wir eingangs erwähnten, bezeichnet man Kräfteabbildungen, bei denen die Wirkungslinien projektiv transformiert werden und die Gleichgewichtsbedingungen erhalten bleiben, als projektive Kräfteabbildungen. Aus den beiden vorhergehenden Sätzen folgt:

Die duale Kräfteabbildung ist eine spezielle projektive Kräfteabbildung.

**4. Verwendung der dualen Kräfteabbildung in der graphischen Statik.** Jedes an einem starren Körper angreifende Kräftesystem kann bekanntlich ersetzt werden durch eine am Nullpunkt $O$ angreifende Einzelkraft $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}, 0$ und ein Kräftepaar $\mathfrak{M} = 0, \overline{\mathfrak{m}}$. Nach den Sonderfällen a) und b) von Nr. 2 werden bei der dualen Kräfteabbildung die in $O$ angreifenden Kräfte $\mathfrak{P}$ in Bildkräfte $\mathfrak{P}' = \mathfrak{p}', \overline{\mathfrak{p}}'$ der $XY$-Ebene und die Kräftepaare $\mathfrak{M}$ in Bildkräfte $\mathfrak{M}' = \mathfrak{m}', \overline{\mathfrak{m}}'$ senkrecht zur $XY$-Ebene transformiert.

Wir erhalten daher in der $XY$-Ebene als Bildebene folgende Abbildung eines beliebigen räumlichen Kräftesystems (Bild 4):

a) einen in einer Geraden $g'$ der Zeichenebene linienflüchtigen Vektor $\mathfrak{p}'$,

b) einen Vektor $\mathfrak{m}'$, der in einer zur Zeichenebene senkrechten Geraden linienflüchtig ist und durch seinen Grundriß $M'$ sowie durch einen Aufriß oder eine Umklappung gegeben werden kann.

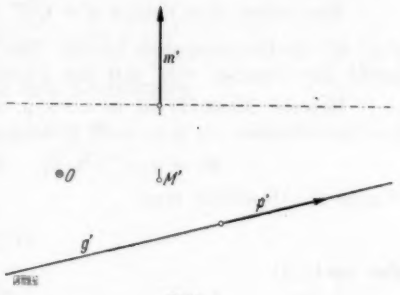


Bild 4.

Die 4 das Kräftesystem $\mathfrak{P}, \mathfrak{M}$ bestimmenden Elemente $g', \mathfrak{p}', M', \mathfrak{m}'$ bezeichnen wir fortan kurz als Bild des gegebenen Kräftesystems, $g'$ nennen wir gelegentlich das Bild der Geraden $g$.

Aus der Erhaltung der Gleichgewichtsbedingungen (vgl. Nr. 3) folgt:

Alle Zusammensetzungen bzw. Zerlegungen räumlicher Kräftesysteme lassen sich in der Zeichenebene durchführen, indem man mit den Hilfsmitteln der ebenen graphischen Statik einerseits die Vektoren $\mathfrak{p}'$ und andererseits die Vektoren $\mathfrak{m}'$ zusammensetzt bzw. zerlegt.

Die Abbildungen eines Vektorbündels $O$ a) in die Vektoren $\mathfrak{p}'$ einer Bildebene oder b) in die Vektoren $\mathfrak{m}'$ senkrecht zu einer Bildebene wurden schon in Arbeiten von R. v. Mises[2]) und W. Prager[3]) benutzt. Während es sich dort aber zunächst nur um Kräftesysteme eines Bündels handelte, können wir hier allgemeine räumliche Kräftesysteme konstruktiv erfassen. Dabei führt die duale Kräfteabbildung zwangsläufig dazu, daß wir die Kraftvektoren nach v. Mises gemäß a) und die Momentvektoren nach Prager gemäß b) abbilden. Diese sich hier naturgemäß ergebende Verkoppelung der Misesschen und Pragerschen Abbildungen wird in Nr. 5 und 6 durch einfache und durchsichtige Konstruktionen für die graphische Statik allgemeiner räumlicher Kräftesysteme auch ihre praktische Rechtfertigung finden.

**5. Abbildung von Einzelkräften und Kraftschrauben.** Wir wenden jetzt das Abbildungsverfahren von Nr. 4 auf Einzelkräfte und Kraftschrauben an.

I. Abbildung einer Einzelkraft.

Wenn das Kräftesystem aus einer Einzelkraft $\mathfrak{K} = \mathfrak{k}, \overline{\mathfrak{k}}$ besteht, sind bei der Zerlegung nach Nr. 4 in $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}, 0$ und $\mathfrak{M} = 0, \overline{\mathfrak{m}}$ die Vektoren $\mathfrak{p}, \overline{\mathfrak{m}}$ mit den Vektoren $\mathfrak{k}, \overline{\mathfrak{k}}$ von Nr. 1 (vgl. Bild 1) identisch. Nach (2) gilt also

$$0 = \mathfrak{k}\,\overline{\mathfrak{k}} = \mathfrak{p}\,\overline{\mathfrak{m}} = p_1\,\overline{m}_1 + p_2\,\overline{m}_2 + p_3\,\overline{m}_3$$

und weiter mit Hilfe von (7)

$$p_2\,x_{M'} - p_1\,y_{M'} - c\,p_3 = 0.$$

Durch Vergleich mit (5) folgt der Satz:

Im Bild $g', \mathfrak{p}', M', \mathfrak{m}'$ liegt der Punkt $M'$ dann und nur dann auf der Geraden $g'$, wenn das gegebene räumliche Kräftesystem sich auf eine Einzelkraft reduziert.

In Bild 4 ist ein nicht auf eine Einzelkraft reduzierbares Kräftesystem, in Bild 5 dagegen eine Einzelkraft dargestellt.

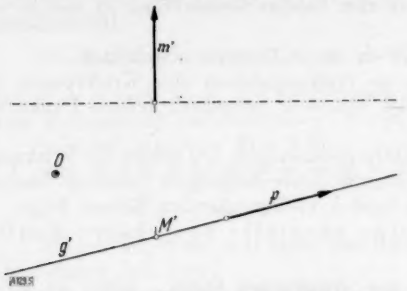



Bild 5 (links).

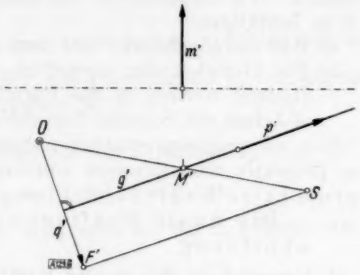



Bild 6 (rechts).

Bestimmung der Kraft $\mathfrak{K}$ aus ihrem Bild $g', \mathfrak{p}', M', \mathfrak{m}'$:

*a*) Der Kraftvektor $\mathfrak{p}$ und damit die Richtung der Wirkungslinie $g$ ist durch $g'$ und $\mathfrak{p}'$ allein festgelegt; die diesbezügliche Konstruktion wurde schon in Nr. 2 (vgl. Bild 2) behandelt.

*β*) Der Spurpunkt $S$ der Wirkungslinie $g$ ergibt sich aus $g', \mathfrak{p}', M', \mathfrak{m}'$ nach folgender Konstruktionsvorschrift (Bild 6):

Man ziehe den Vektor $\mathfrak{q}' = \overrightarrow{OF'}$ von der Länge $\frac{|\mathfrak{m}'|}{|\mathfrak{p}'|}$ senkrecht zu $g'$ und zwar so, daß $\mathfrak{q}', \mathfrak{p}', \mathfrak{m}'$ ein Rechtssystem bilden. Der Spurpunkt $S$ der Wirkungslinie $g$ ist dann der Schnittpunkt der Geraden $OM'$ mit der Parallelen zu $g'$ durch $F'$.

Beweis: Nach (1) ist $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{p}$, wobei jetzt $\mathfrak{r}$ den Ortsvektor $\overrightarrow{OS}$ des Spurpunktes $S$ mit den Koordinaten $x_s, y_s\,(z_s = 0)$ bedeuten soll. Daraus folgen die 3 Komponentengleichungen

$$\overline{m}_1 = y_s p_3 - z_s p_2, \quad \overline{m}_2 = z_s p_1 - x_s p_3, \quad \overline{m}_3 = x_s p_2 - y_s p_1.$$

Wegen $z_s = 0$ erhält man

$$x_s = -\frac{\overline{m}_2}{p_3}, \quad y_s = \frac{\overline{m}_1}{p_3},$$

also nach (7)

$$x_s : y_s = x_{M'} : y_{M'},$$

d. h. der Spurpunkt $S$ liegt auf der Geraden $OM'$. Ferner ist die $z$-Komponente des Momentvektors $\overline{\mathfrak{m}}$ der gegebenen Kraft einerseits definitionsgemäß gleich $\mathfrak{q}' \times \mathfrak{p}'$, andererseits auf Grund von (6) wegen $m'_1 = m'_2 = 0$, $m'_3 = \overline{m}_3$ gleich $\mathfrak{m}'$; daher bilden $\mathfrak{q}', \mathfrak{p}', \mathfrak{m}'$ ein Rechtssystem und, da $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{q}'$ außerdem senkrecht sind, hat man

$$|\mathfrak{m}'| = |\mathfrak{q}' \times \mathfrak{p}'| = |\mathfrak{q}'| \cdot |\mathfrak{p}'|.$$

Sonderfälle und Ausnahmefälle:

a) Wenn die Wirkungslinie der Kraft durch den Nullpunkt $O$ geht, wird $\mathfrak{m}' = 0$ und $M'$ unbestimmt, das Bild der Kraft reduziert sich auf $g', \mathfrak{p}'$.

b) Wenn die Kraft in ein Kräftepaar entartet, wird $\mathfrak{p}' = 0$ und $g'$ unbestimmt; das Bild der Kraft reduziert sich auf $M', \mathfrak{m}'$.

c) Wenn die Wirkungslinie der Kraft die $Z$-Achse schneidet, entartet nach Nr. 2 $\mathfrak{m}'$ in ein Kräftepaar; im Bild der Kraft ist $M'$ der unendlich ferne Punkt der Geraden $g'$.

d) Wenn die Wirkungslinie der Kraft auf der Bildebene senkrecht steht, entarten nach Nr. 2 $\mathfrak{m}'$ und $\mathfrak{p}'$ in Kräftepaare; im Bild der Kraft rücken $M'$ und $g'$ ins Unendliche.

Um nicht zu weitläufig zu werden, wollen wir von nun an die beiden Ausnahmefälle c) und d) von der Betrachtung ausschließen.

II. Abbildung zweier Kräfte.

Zwei Kräfte $\mathfrak{K}_\mathrm{I}$ und $\mathfrak{K}_\mathrm{II}$ seien vorgegeben durch ihre Bilder $g'_\mathrm{I}, \mathfrak{p}'_\mathrm{I}, M'_\mathrm{I}, \mathfrak{m}'_\mathrm{I}$ und $g'_\mathrm{II}, \mathfrak{p}'_\mathrm{II}, M'_\mathrm{II}, \mathfrak{m}'_\mathrm{II}$ (Bild 7). Der Fallunterscheidung nach parallelen, sich schneidenden oder windschiefen Wirkungslinien $g_\mathrm{I}$, $g_\mathrm{II}$ der gegebenen Kräfte $\mathfrak{K}_\mathrm{I}$, $\mathfrak{K}_\mathrm{II}$ entspricht folgende Fallunterscheidung im Bild der Kräfte:

Wenn $g'_\mathrm{I} \equiv g'_\mathrm{II}$, sind $g_\mathrm{I}$, $g_\mathrm{II}$ parallel. Wenn $g'_\mathrm{I}$ verschieden ist von $g'_\mathrm{II}$, setze man $\mathfrak{p}'_\mathrm{I}, \mathfrak{p}'_\mathrm{II}$ und $\mathfrak{m}'_\mathrm{I}, \mathfrak{m}'_\mathrm{II}$ zum resultierenden Vektor $\mathfrak{p}'_R$ bzw. $\mathfrak{m}'_R$ zusammen.

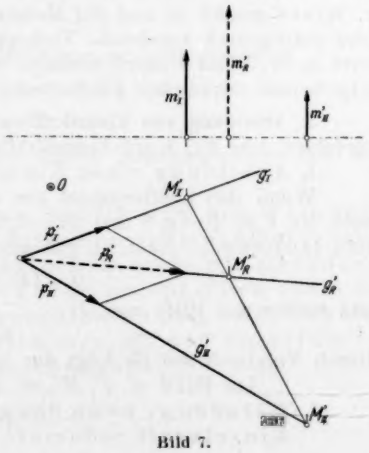



Bild 7.

Falls dann der Grundrißpunkt $M'_R$ von $\mathfrak{m}'_R$ auf der Angriffslinie $g'_R$ von $\mathfrak{p}'_R$ liegt, schneiden sich die Wirkungslinien $g_\mathrm{I}$, $g_\mathrm{II}$ und $\mathfrak{K}_\mathrm{I}$, $\mathfrak{K}_\mathrm{II}$ lassen sich zur resultierenden Kraft $\mathfrak{K}_R$ mit dem Bild $g'_R, \mathfrak{p}'_R, M'_R, \mathfrak{m}'_R$ zusammensetzen; liegt dagegen $M'_R$ nicht auf $g'_R$, dann sind die Wirkungslinien $g_\mathrm{I}$, $g_\mathrm{II}$ windschief.

III. Abbildung einer Kraftschraube. Eine Kraft $\mathfrak{K} = \mathfrak{k}, \bar{\mathfrak{k}}$ und ein Kräftepaar $\mathfrak{R} = 0, \bar{\mathfrak{r}}$ faßt man bekanntlich unter der Bezeichnung Kraftschraube zusammen, wenn der Kraftvektor $\mathfrak{k}$ von $\mathfrak{K}$ und der Momentvektor $\bar{\mathfrak{r}}$ von $\mathfrak{R}$ parallel sind.

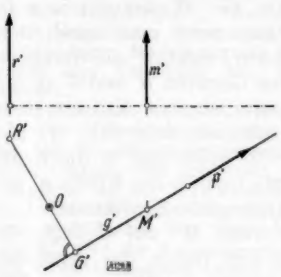


Bild 8.

Außerdem schicken wir folgende Definition voraus (vgl. Bild 8): Ein Punkt $R'$ der Bildebene heißt Antipol einer Geraden $g'$ der Bildebene, wenn die Verlängerung des Lotes $OG'$ zu $g'$ über $O$ hinaus den Punkt $R'$ enthält und die Strecken $OG'$, $OR'$ in der Beziehung $OG' \cdot OR' = c^2$ stehen.

Für das Bild einer Kraftschraube gilt dann folgender Satz (Bild 8):

Eine Kraft $\mathfrak{K}$ mit dem Bild $g'$, $\mathfrak{p}'$, $M'$, $\mathfrak{m}'$ und ein Kräftepaar $\mathfrak{R}$ mit dem Bild $R'$, $\bar{\mathfrak{r}}'$ bilden eine Kraftschraube, wenn $R'$ der Antipol von $g'$ ist.

Beweis: Nach (7) hat $R'$ die Koordinaten

$$x_{R'} = -c\frac{\bar{r}_2}{\bar{r}_3}, \quad y_{R'} = +c\frac{\bar{r}_1}{\bar{r}_3}$$

und nach (5) wird $g'$ vom Lot aus $O$ im Punkt $G'$ mit den Koordinaten

$$x_{G'} = +c\frac{p_2 p_3}{p_1^2 + p_2^2}, \quad y_{G'} = -c\frac{p_1 p_3}{p_1^2 + p_2^2}$$

geschnitten. Da $\mathfrak{p}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ parallel sind, also

$$p_1 : p_2 : p_3 = \bar{r}_1 ; \; r_2 ; \; \bar{r}_3$$

gilt, folgt aus den vorhergehenden Gleichungen

$$x_{R'} = -c\frac{p_2}{p_3} = -x_{G'}\frac{p_1^2 + p_2^2}{p_3^2} = -x_{G'}\frac{c^2}{x_{G'}^2 + y_{G'}^2},$$

$$y_{R'} = +c\frac{p_1}{p_3} = -y_{G'}\frac{p_1^2 + p_2^2}{p_3^2} = -y_{G'}\frac{c^2}{x_{G'}^2 + y_{G'}^2},$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

**6. Grundaufgaben der graphischen Statik räumlicher Kräftesysteme.** Zum Schlusse zeigen wir, wie man mit Hilfe der dualen Kräfteabbildung zwei Grundaufgaben der graphischen Statik räumlicher Kräftesysteme lösen kann.

**Aufgabe I:** Vorgegeben ist das Bild $g'$, $\mathfrak{p}'$, $M'$, $\mathfrak{m}'$ eines Kräftesystems, das sich nicht auf eine Einzelkraft und nicht auf ein Kräftepaar reduzieren soll. Gesucht ist das Bild der das Kräftesystem ersetzenden Kraftschraube.

Konstruktion (Bild 9):

Man fälle das Lot $OG'$ aus $O$ auf $g'$ und ermittle auf der Verlängerung von $OG'$ über $O$ den Antipol $R'$ der Geraden $g'$ (vgl. Nr. 5, III). Dann bestimme man den Schnittpunkt $M'_*$ der Geraden $g'$ und $R'M'$ und zerlege den Vektor $\mathfrak{m}'$ in die parallelen, in $R'$ und $M'_*$ angreifenden Vektoren $\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{m}'_*$. Damit ist das Kräftesystem $g'$, $\mathfrak{p}'$, $M'$, $\mathfrak{m}'$ zerlegt in die Kraft mit dem Bild $g'_* (= g')$, $\mathfrak{p}'_* (= \mathfrak{p}')$, $M'_*$, $\mathfrak{m}'_*$ und das Kräftepaar mit dem Bild $R'$, $\mathfrak{r}'$; nach Nr. 5, III bildet die Kraft $g'_*$, $\mathfrak{p}'_*$, $M'_*$, $\mathfrak{m}'_*$ mit dem Kräftepaar $R'$, $\mathfrak{r}'$ die gesuchte Kraftschraube.

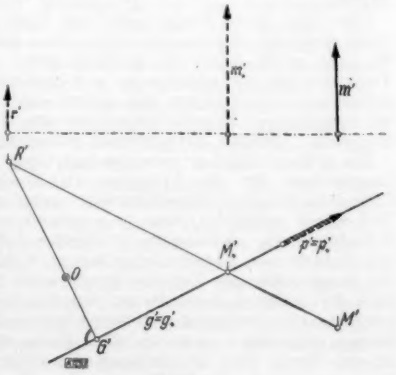


Bild 9.

**Aufgabe II:** Vorgegeben ist das Bild $g'$, $\mathfrak{p}'$, $M'$ $\mathfrak{m}'$ eines Kräftesystems, das sich nicht auf eine Einzelkraft und nicht auf ein Kräftepaar reduzieren soll, sowie der Spurpunkt $U$ und das Bild $a'$ einer Geraden $a$. Gesucht ist das Bild des das Kräftesystem ersetzenden Kraftkreuzes, dessen eine Wirkungslinie die Gerade $a$ ist.

Konstruktion (Bild 10):

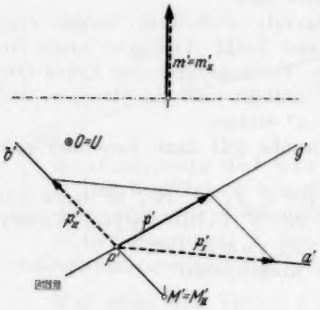



Bild 10.

Wir wählen den Spurpunkt $U$ als Nullpunkt $O$ der dualen Kräfteabbildung; $g'$, $\mathfrak{p}'$, $M'$, $\mathfrak{m}'$ bzw. $a'$ sei das Bild des gegebenen Kräftesystems bzw. der Wirkungslinie $a$ in bezug auf diesen Nullpunkt. Dann ziehe man durch den Schnittpunkt $P'$ von $g'$ und $a'$ und den Punkt $M'$ die Gerade $b'$ und zerlege den Vektor $\mathfrak{p}'$ nach den Geraden $a'$ und $b'$ in die Komponenten $\mathfrak{p}'_{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{p}'_{\mathrm{II}}$. Damit ist das Kräftesystem $g'$, $\mathfrak{p}'$, $M'$, $\mathfrak{m}'$ zerlegt in die Kraft mit dem Bild $a'$, $\mathfrak{p}'_{\mathrm{I}}$, deren Wirkungslinie $a$ durch $O = U$ geht, und in die Kraft mit dem Bild $b'$, $\mathfrak{p}'_{\mathrm{II}}$ $M'_{\mathrm{II}} (= M')$, $\mathfrak{m}'_{\mathrm{II}} (= \mathfrak{m}')$; die Kräfte $a'$, $\mathfrak{p}'_{\mathrm{I}}$ und $b'$, $\mathfrak{p}'_{\mathrm{II}}$, $M'_{\mathrm{II}}$, $m'_{\mathrm{II}}$ bilden das gesuchte Kraftkreuz.

Die Konstruktion versagt, wenn $M'$ auf $a'$ liegt; in diesem Falle ist $a$ eine Nullinie des durch das gegebene Kräftesystem bestimmten Nullsystems. 129

# BUCHBESPRECHUNGEN

FRITZ **WEINIG**, Aerodynamik der Luftschraube. XVI + 484 S. m. 374 Abb. Berlin 1940, Verlag Julius Springer. Preis geb. 48 M.

Die eingehende Behandlung eines solchen Spezialgebietes, wie es die Aerodynamik der Luftschraube darstellt, kommt einem schon lange gehegten Wunsche entgegen. Zwar gab es viele und gute Sonderarbeiten, auch zusammenfassende Darstellungen, aber die ersteren blieben meist ohne Zusammenhang miteinander, und die letzteren stammen größtenteils aus älterer Zeit, so daß wichtige Teile der neueren Entwicklung fehlen. Das vorliegende Buch von Weinig füllt diese Lücke aus und erweitert dazu unsere Kenntnis von der Luftschraube nach verschiedenen Richtungen hin sehr erheblich.

Die Aufgaben und Fragen, die ein Lehrbuch dieser Art aufzuzeigen hat, sind:

Erkenntnis der theoretischen Grundlagen.
Gegebenheiten der praktischen Ausführungen.
Wie ist eine Schraube zu berechnen?
Wie sind die besten Verhältnisse zu finden?
Wie ist eine vorgelegte Schraube zu beurteilen?
Wie verhält sich ein Propeller unter verschiedenen Betriebsbedingungen?
Wie kann die bisherige Theorie verfeinert werden?

Über alle diese Dinge gibt das Buch erschöpfende Auskunft. Dankenswert ist schon im Eingang die sehr große Zahl von Zahlenangaben und von Verfahren für die Aufmessung und Ermittlung feststehender geometrischer und physikalischer Daten bei vorgelegten Luftschrauben (Gewichte, Trägheitsmomente, Abmaße ausgeführter Schrauben usw.).

Die früher üblichen verschiedenartigen Betrachtungsweisen für die Propeller als Strahltheorie, Flügelblattheorie, Wirbeltheorie waren nur zum Teil durch sachliche, dem Gegenstand angepaßte Gesichtspunkte entstanden, vielmehr jedoch aus der historischen Entwicklung heraus bedingt. Für die verschiedensten Zwecke wurde bald die eine, bald die andere Lehre benutzt, man kombinierte sie auch wohl für bestimmte Rechenaufgaben (Kármán, Bienen, Glauert u. a.). In dem Buche wird dies ersetzt durch eine Darstellung, die dem Problem viel mehr und unmittelbarer angepaßt ist: Zunächst „die Elementarschraube“; sie ist für schwache und große Belastung exakt berechenbar, die Reibung läßt sich mitberücksichtigen, und vor allem lehrt diese Theorie den Einfluß von Steigung und Blattbreite wie Leistung auch unter verschiedenen Betriebsverhältnissen vollkommen exakt beurteilen. Man kann diese Lehre von der Elementarschraube als die wichtigste und vielfach schon genügende Annäherung an die genaue Schraubentheorie ansprechen.

Viele wertvolle Erkenntnisse (auch aus eigenen Arbeiten des Verfassers) sind in diesem ersten großen Abschnitt untergebracht. Bemerkenswert erscheint unter anderen die exakte Darstellung von Schub- und Drehmoment in Abhängigkeit vom Fortschrittsgrad $\lambda$. Die danach für kleine Steigungsverhältnisse vereinfachten Formeln und Diagramme bedeuten eine Rechtfertigung für die von verschiedenen Autoren als erste Näherung angenommene lineare bzw. quadratische Abhängigkeit dieser Größen von $\lambda$.

Interessant ist auch das eingeschobene Kapitel über Leitvorrichtungen, weil es die Theorie gegenläufiger Schrauben in sich schließt. Dabei werden auch sonst selten vorkommende, aber für die zukünftige Entwicklung (für sehr schnelle Flugzeuge) wichtige Erkenntnisse gewonnen und ausdrücklich herausgestellt. Auch die schwierigen Fälle ungleichmäßiger Schraubenströmungen (z. B. Schräganblasen) behandelt das Buch in seltener Ausführlichkeit.

Die folgerichtige Weiterentwicklung führt dann zur „Gesamtschraube“ (und zwar: 1. schwachbelastete Schraube mit sehr großer Flügelzahl, 2. Luftschraube mit endlicher Flügelzahl), die durch radiale Zusammenziehung des Schraubenstrahles und durch Druckänderung in demselben von der Elementarschraube unterschieden ist. Hier ist das wichtige Problem der günstigsten Schubverteilung zuerst näherungsweise und dann als exakte Randwertaufgabe durchgeführt.

In diesem, wie auch in den anderen Kapiteln ist die Darstellung so gehalten, daß nach einem kurzen Überblick über die zu erwartenden Resultate, die jedesmal hinzugenommenen Erweiterungen und Verfeinerungen der Theorie (Reibung, endliche Flügelzahl usw.) Schritt für Schritt nacheinander

entwickelt werden. Zu allen genannten theoretischen Entwicklungen bringt das Buch auch Zahlenwerte und stellt die Ergebnisse in Kurven fest, die für die praktische Berechnung sofort herangezogen werden können. In einem weiteren besonderen Abschnitt „Berechnung von Luftschrauben" wird gezeigt, wie der Berechnungsgang normalerweise durchgeführt werden kann, entweder auf Grund der benützten Tragflügelprofile oder nach der Methode der „gleichwertigen Profilpolaren".

Im letzten Teil „Zusammenwirken von Luftschraube und Flugzeug" werden die Grundlagen für die Behandlung dieser nicht ganz einfachen Zusammenhänge dargelegt und durch Zahlenrechnungen und Vergleiche mit Versuchsergebnissen erläutert.

Sehr dankenswert ist die Beigabe einer großen Zahl von Versuchsergebnissen mit Luftschrauben und ein Schrifttumsverzeichnis von sehr erheblichem Umfang (296 Arbeiten!).

Dagegen ist die konstruktive Ausführung von Luftschrauben in dem Buche nicht enthalten. Zwar rechtfertigt der Titel des Werkes diesen Verzicht, aber der Verfasser gibt im Vorwort auch noch einen besonderen Grund dafür an, daß nämlich gerade die konstruktive Gestaltung in sehr schneller Entwicklung begriffen ist. Eine Darstellung in dem Buche würde es (wenigstens nach dieser Richtung hin) schnell veralten lassen.

Die hier gegebene kurze Übersicht zeigt schon, wie umfangreich das Wissensmaterial ist, das der Verfasser in diesem Buche zusammengetragen hat. Es ist nicht überall leicht zu lesen; das liegt aber an der Vielseitigkeit und den zum Teil sehr verwickelten Zusammenhängen des Stoffes. Dem Verfasser ist zuzugestehen, daß er es gut verstanden hat, auch solche schwierige Stellen anschaulich zu gestalten, und daß er überhaupt in allen Teilen die Darstellung flüssig und klar wiedergegeben hat. Das Werk von Weinig bedeutet jedenfalls einen sehr wertvollen Zuwachs in der neueren aerodynamischen Literatur.

Hannover. A. Pröll. 163

H. W. **DROSTE,** Die Lösung angewandter Differentialgleichungen mittels Laplacescher Transformation. Mit einem Vorwort von Prof. Dr. G. Doetsch. „Neuere Rechenverfahren der Technik". Heft 1. 35 S. Berlin 1939, Verlag E. S. Mittler u. Sohn. Preis 5 M.

Das algebraische Rechnen mit dem Differentialsymbol, das bis auf Leibniz zurückgeht, wurde von dem Ingenieur Oliver Heaviside mit großer Virtuosität für die Lösung von Aufgaben ausgebaut, die auf partielle Differentialgleichungen führen. Da Heaviside seine Entwicklungen rein formal durchführt, ohne eine eigentliche mathematische Begründung zu geben, bedarf ihr Gebrauch großer Vorsicht, wenn man falsche oder unvollständige Ergebnisse vermeiden will. Schon vor einer Reihe von Jahren ist die Erkenntnis aufgetaucht, daß der Heavisidesche Formalismus auf eine Funktionentransformation hinauskommt, die in den Arbeiten von G. Giorgi, K. W. Wagner, J. R. Carson, G. Doetsch und B. van der Pol in verschiedener Form eingeführt wurde. G. Doetsch insbesondere verdanken wir eine konsequent auf die Laplacesche Transformation aufgebaute Darlegung des Operatorenkalküls vom Standpunkt der modernen Mathematik.

H. W. Droste erläutert in dem vorliegenden Heft in aller Kürze die Lösung von Differentialgleichungen mittels der Funktionentransformation nach Laplace in engem Anschluß an die Darstellung von G. Doetsch. Er leitet die wichtigsten Regeln für das Rechnen mit der Laplaceschen Transformation her und bringt Beispiele für ihre Anwendung. Es folgt die Lösung von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und der Heavisidesche Entwicklungssatz, der hier allerdings nur für rationale Operatoren bewiesen wird, während seine wichtigsten technischen Anwendungen doch auf dem Gebiet der meromorphen Funktionen liegen. Im nächsten Abschnitt zeigt der Verfasser im Anschluß an Arbeiten von B. van der Pol und H. Fischer, wie man durch die Laplacesche Transformation der Besselschen Differentialgleichung auf einfachem Wege wichtige Beziehungen zwischen den Besselschen Funktionen erhält. Auch bei den linearen partiellen Differentialgleichungen bietet die Anwendung der Laplaceschen Transformation wesentliche Vorteile, was hier am Beispiel der Telegraphengleichung gezeigt wird. Auf die Lösung durch asymptotische Reihen, für die seinerzeit Heaviside zahlreiche Beispiele gegeben hat, geht der Verfasser nicht ein, weil dies über den von ihm gesteckten mathematischen Rahmen hinausgeht. Eine Sammlung von Laplace-Integralen am Schluß des Heftes rundet die Darstellung ab.

Die vorstehende Inhaltsübersicht zeigt, daß der Verfasser auf wenig Seiten ein ausgedehntes Sachgebiet behandelt und die wichtigsten Grundzüge einer Methode erläutert, die für den theoretisch arbeitenden Ingenieur und Physiker von großem Wert und Nutzen ist. In ihrer sehr konzentrierten Form ist diese Darstellung keine leichte Lektüre, obgleich an mathematischen Vorkenntnissen nicht mehr vorausgesetzt wird, als was ein Ingenieur im Diplomexamen nachweisen muß.

Berlin. Karl Willy Wagner. 149

Dr. HERMANN **DIESSELHORST,** Prof. em. d. Physik a. d. Techn. Hochsch. in Braunschweig, Magnetische Felder und Kräfte mit einer Übersicht über die Vektorenrechnung, eine mit Zusätzen versehene Sonderausgabe des Beitrages „Elektrodynamik" aus Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus, Bd. IV (1920). VI + 216 S. m. 56 Abb. Leipzig 1939, Verlag Johann Ambrosius Barth. Preis kart. 8 M.

In einem ersten kurzen Abschnitt werden die experimentellen Grundlagen gegeben, wobei der Verfasser besonders auf die Gedankengänge von Ampere eingeht, für weitere Versuche dagegen auf die bekannten ausführlichen Physikbücher verweist. Den Hauptinhalt bilden auf 140 Seiten die Systeme von Magneten und elektrischen Strömen unter starker Anwendung der Vektoren- und Affinoren-Rechnung; die mechanischen Kräfte und Energieverhältnisse werden ausführlich behandelt. In einem Geleitwort betont Fritz Emde, daß die Vertreter der Mathematik bei der Vektorenrechnung meist nur die Geometrie und Mechanik berücksichtigen, während ihnen Elektrizitätslehre ferner liegt. Und doch lassen sich viele Probleme der Elektrodynamik, z. B. die sprunghaften Änderungen an den Körperoberflächen in einfacher Weise nur unter Zuhilfenahme der Vektorenrechnung behandeln. Aus diesem Grunde ist ein längerer Abschnitt von fast 50 Seiten über diese Rechnungsmethode vorausgeschickt. Da die weiteren Fortschritte der Wissenschaft an den hier gegebenen Grundlagen nicht viel ändern werden, so dürfte dieses Buch für lange Zeit allen denen, die sich mit magnetischen Fragen zu befassen haben, eine wertvolle Hilfe sein. Das Buch ist für denjenigen, der mit der Vektorenrechnung vertraut ist, klar und leicht verständlich geschrieben, setzt allerdings eine Beherrschung der mathematischen Denkweise voraus.

Freiberg (Sachsen). Brion. 160

XUM

ERWIN **LOHR,** Prof. a. d. Deutschen Techn. Hochschule Brünn, Vektor- und Dyadenrechnung für Physiker und Techniker. („Arbeitsmethoden der modernen Naturwissenschaften.") XV + 411 S. m. 34 Fig. Berlin 1939, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 18 M.

Als erster Band einer neuen Sammlung „Arbeitsmethoden der modernen Naturwissenschaften" erscheint das vorliegende Buch, das vor allem der Förderung der praktischen Verwendung der Vektor- und Dyadenrechnung in Physik und Technik dienen will. Offenbar der Brünner Tradition folgend, verwendet Verf. die Gibbs-Jaumannsche Schreibweise. Er ordnet den Stoff in drei Abschnitte. In den beiden ersten: Arithmetik und Algebra extensiver Größen und Analysis dieser Größen entwickelt er zunächst den ganzen Formelapparat. Er knüpft dabei an das Rechnen mit reellen und komplexen Größen an und sucht durch das Verfahren des „Projizierens" die systematische Verbindung mit der gewöhnlichen Arithmetik, Algebra und Analysis möglichst aufrecht zu halten. Der Hauptabschnitt bringt dann Anwendungen insbesondere auf verschiedene Gebiete der Physik, so auf das der Mechanik, der Elastizitätstheorie, der Hydrodynamik, der elektromagnetischen und optischen Erscheinungen, ferner einen Ausblick auf die Verwendung in der Quantentheorie. Ein kurzer Abschnitt ist den Anwendungen in der Geometrie gewidmet.

Das Buch ist im wesentlichen auf die Bedürfnisse des theoretischen Physikers zugeschnitten. Als Einführung in das Gebiet eignet es sich, wenigstens für den Techniker, kaum, einmal weil zunächst ein Übermaß von Formeln zu bewältigen ist, deren Verwendungsmöglichkeit meist erst viel später aufgezeigt wird, dann aber auch, weil die Anschauung ziemlich zurücktritt; dagegen wird es dem, der schon einigermaßen mit dem Gegenstand vertraut ist, zur Weiterarbeit und auf Grund des ausführlichen Inhaltsverzeichnisses zum Nachschlagen gute Dienste leisten.

Dresden. Willers. 115

A. ADRIAN **ALBERT,** Associate Professor a. d. Universität Chicago, Structure of Algebras. (American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIV.) XI + 210 S. New York 1939, American Mathematical Society. Preis 4 Dollar.

Man pflegt einen Größenbereich, in dem Addition, Subtraktion und Multiplikation unbeschränkt ausführbar sind, d. h. einen Ring, dann als Algebra zu bezeichnen, wenn er über einem Körper liegt, mit dessen Elementen auch im erweiterten Bereich unbeschränkt und in gewöhnlicher Weise gerechnet werden kann. Die reiche Entwicklung, die die Theorie der Algebren in den letzten Jahren genommen hat, ist eine schöne Frucht internationaler Zusammenarbeit. Dem Verfasser selbst sind große Fortschritte dabei zu verdanken, er ist daher wie kein anderer berufen, eine Gesamtdarstellung zu geben, die dreiteilig geplant ist. Die Einführung in das Gebiet brachte das Buch Modern Higher Algebra, hier liegt der zweite Teil vor, ein dritter über die Arithmetik der Algebren soll folgen. Das Buch bringt die Fortschritte, die seit dem Bericht Deurings (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete IV, 1 1935) zu verzeichnen sind, und gibt bei älteren Untersuchungen neue Darstellungen und wesentliche Vereinfachungen. Vorwort und Inhaltsverzeichnis unterrichten ausführlich über den Inhalt, auf den einzugehen hier zu weit führen würde.

Halle (Saale). H. Brandt. 150

Dr. WOLFGANG **KRULL,** o. Prof. a. d. Universität Bonn, Elementare Algebra vom höheren Standpunkt. (Sammlung Göschen, Bd. 930.) 142 S. m. 6 Zeichn. Berlin 1939, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 1,62 M.

Das reichhaltige Büchlein bringt die elementare Algebra in dem üblichen Umfang unter Einschluß der genäherten Wurzelberechnung bis zur Einführung in die Galoissche Theorie, die da, wo sie auch historisch begonnen hat, nämlich an den Kreisteilungsgleichungen, erläutert wird. In 6 Kapiteln werden behandelt: Formales Buchstabenrechnen, Nullstellen und Zerlegung von Polynomen, Auflösung der Gleichungen ersten bis vierten Grades, höhere Gleichungstheorie, Kreisteilungstheorie und zuletzt numerische Wurzelberechnung. Dabei wird überall von modernen Begriffen und Gesichtspunkten Gebrauch gemacht, und es werden Hinweise auf weiterführende Untersuchungen gegeben. So wird derjenige, der Bekanntes wiederholen will, durch neue Ausblicke angeregt, während der Weiterstrebende zugleich eine erste Einführung in neuere algebraische Untersuchungen findet.

Halle (Saale). H. Brandt. 151

L'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, Nel Quadriennio 28 Ottobre 1933—XII — 27 Ottobre 1937—XV, Publicazioni dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo, N 27. VIII + 133 + X Seiten. Roma 1938—XVI, Consiglio nazionale delle Ricerche.

Dieser Tätigkeitsbericht des römischen Recheninstituts enthält zunächst einen kurzen Überblick über die Tätigkeit in den Jahren 1933 bis 1937, eine Schilderung der Organisation des Instituts, Urteile über das Institut, Personalangaben (S. 1 bis 38); eine Liste der Veröffentlichungen der Institutsmitglieder (S. 39 bis 48), sodann 118 Berichte über die einzelnen Arbeiten (S. 51 bis 116), wo bei einigen kriegswichtigen Arbeiten allerdings nur die Titel angegeben werden; Angaben über die Zusammenarbeit mit andern Anstalten (S. 119 bis 129); ein Namenverzeichnis (S. 131 bis 133) und eine Liste früherer Veröffentlichungen aus den Jahren 1927 bis 1936 (S. I bis X).

Das Recheninstitut hat 14 Mitarbeiter und 7 Mitarbeiterinnen. Die meisten davon sind Mathematiker. Direktor ist Prof. M. Picone. Das Institut ist aufs reichste mit graphischen und mechanischen Instrumenten ausgestattet; doch werden Einzelheiten darüber nicht angegeben. Das Institut nimmt sowohl von den Behörden wie von der Industrie Aufträge entgegen. Die Arbeiten sind außerordentlich vielseitig, sie betreffen fast alle Gebiete der Mechanik, Physik, Technik und Statistik. Es wird berichtet, daß auch neue Berechnungsmethoden entwickelt worden sind.

Wer das Buch kostenlos zugesandt zu erhalten wünscht, wende sich unmittelbar an das Istituto Nazionale per le applicazioni del calcolo, Roma, Piazzale delle Scienze.

Stuttgart. Fritz Emde. 158

Prof. Dr. **J. PETERS,** Sechsstellige Tafeln der trigonometrischen Funktionen. 2. Aufl. VII + 293 S. Bonn und Berlin 1939, Verlag Ferdinand Dümmler. Preis geb. 32,40 M.

Gut zehn Jahre nach Erscheinen der ersten kommt jetzt mit einigen Berichtigungen, im großen Ganzen aber unverändert die zweite Auflage dieser für das Rechnen mit Maschinen außerordentlich wertvollen Tafeln heraus. Sie enthalten in der Hauptsache mit einem Argumentschritt von 10″ die sechs trigonometrischen Funktionen mit sechs geltenden Ziffern, dazu die ersten

Differenzen und Proportionaltafeln, ferner um in möglichst allen Gebieten linear interpolieren zu können $w \cdot \operatorname{ctg} w$ und $w \cdot \operatorname{cosec} w$ von 0° bis 1° 20′ mit einem Argumentschritt von 1″. Anordnung, Druck und Ausstattung der Tafeln sind ausgezeichnet.

Dresden. Willers. 114

Dr. phil. F. **DRENCKHAHN,** Prof. a. d. Hochschule für Lehrerbildung, Seestadt Rostock, unter Mitarbeit von Dr.-Ing. habil. U. Graf, Prof. a. d. Techn. Hochschule Danzig, Geländemathematik. VIII, 211 S. mit 283 Abb. Langensalza-Berlin-Leipzig 1939, Verlag von Julius Beltz. Preis geb. 7 M.

Nach dem Vorwort stellt die „Geländemathematik" eine Zusammenfassung der Geländekunde und der Vermessungskunde vor. Das Buch soll eine ohne besonderes Fachstudium verständliche Darstellung sowohl der theoretischen als auch der praktischen Grundlagen der Vermessungs- und Geländekunde sein; es wendet sich an „Studenten, die Angewandte Mathematik nicht gerade als Spezialfach studieren, an Lehrkräfte an den Schulen, an die Besucher von Fachschulen, und schließlich an alle diejenigen, die in der Ausübung von Wehr- und Geländesport mit der Geländemathematik in Berührung kommen".

Das Buch ist in elf Teile eingeteilt, in denen die Vermessungsebene, Hilfsmittel für Absteckungen und Messungen in der Horizontalebene, Hilfsmittel für Messungen in der Vertikalebene, elementare Betrachtungen über die bei Vermessungen auftretenden Beobachtungsfehler, Horizontalaufnahmen, Vertikalaufnahmen, vereinigte Längen- und Höhenmessungen — besser wohl vereinigte Horizontal- und Vertikalaufnahme — Geländemathematik im Geländedienst (Wehrsport), der Mensch als das Maß der Dinge — gemeint ist das „Messen" ohne besondere Hilfsmittel —, die geometrischen Grundlagen des Luftbildwesens — oder der Luftbildmessung — und Kartenentwürfe, die beiden letzten Teile von U. Graf, behandelt werden.

Die ersten sieben Teile beschäftigen sich mit den Hilfsmitteln und Verfahren der Vermessungskunde in einer für Nichtfachleute bestimmten Darstellung. Wie weit bzw. wie wenig weit man dabei im einzelnen Fall gehen soll, ist eine Frage der persönlichen Auffassung. Ich kann dem Verfasser nicht überall beistimmen. Z. B. dürfte m. E., nachdem einerseits die einfachsten Zielvorrichtungen in breitester Form behandelt wurden und andererseits Theodolite wie der kleine Reisetheodolit der Firma M. Hildebrand und sogar der Theodolit II der Firma C. Zeiß vorgeführt werden, eine Behandlung des Zielfernrohrs in seiner Bauart nach Ramsden und in der Bauart mit innerer Einstellinse unter Beifügung von schematischen Abbildungen nicht fehlen. Oder, nachdem begrüßenswerterweise auf das Fehlerfortpflanzungsgesetz hingewiesen wurde, wäre es angebracht, das Gesetz auch in seiner allgemeinsten Form anzugeben. Beim Nivellierinstrument wird auf dessen Prüfung und Berichtigung eingegangen; aber in einem Umfang, der einerseits zu viel und andererseits doch wieder zu wenig bietet. Bei der Messung von Vertikalwinkeln geht es der Bestimmung des Buches entsprechend zu weit, wenn in dem beigefügten Zahlenbeispiel das Verfahren der Messung in zwei Fernrohrlagen mit Ablesung an zwei Nonien angegeben wird. Nachdem beim Okularfadenentfernungsmesser — in etwas umständlicher Weise — die Formel für horizontale Zielung hergeleitet wurde, dürften die beiden Formeln für nicht horizontale Zielung nicht fehlen. Im Zusammenhang mit der optischen Entfernungsmessung wird — mit einer nicht ganz gelungenen Erklärung des Gerätes — der stereoskopische Entfernungsmesser mit räumlicher Skala von C. Pulfrich aufgeführt; im Anschluß daran müßte der militärisch wichtigere stereoskopische Entfernungsmesser mit räumlich einstellbarer Marke erwähnt werden.

Von einigen Ungenauigkeiten, die mir aufgefallen sind, mögen die folgenden angeführt sein. Beim Theodolit wird erwähnt, daß man bei vorhandener „Nivellierwendelibelle" — wie eine solche beschaffen ist, wird nicht gesagt — mit dem Theodolit auch nivellieren könne; dazu braucht man bekanntlich keine Wendelibelle. Was unter „Okularschraubendistanzmesser" verstanden wird, ist mir unklar.

Bei dem mit der Photogrammetrie sich befassenden Teil tritt die Frage auf, ob in einem Buch wie in dem vorliegenden nicht doch auf die linienweise Auswertung von Meßbildern mit Hilfe eines der bekannten Geräte eingegangen werden sollte.

In den Kreisen, für die das Buch gedacht ist, wird es sicher viele Leser finden.

Stuttgart. P. Werkmeister. 138

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

RICHARD **DOERFLING,** Mathematik für Ingenieure und Techniker. 533 S. m. 290 Bildern. München und Berlin 1939, Verlag R. Oldenbourg. Preis geb. 9,60 M.

Dr. phil. HANS **ERTEL,** Elemente der Operatorenrechnung mit geophysikalischen Anwendungen. VI + 133 S. m. 8 Abb. Berlin 1940, Verlag Julius Springer. Preis brosch. 7,50 M.

Dr. B. von **JUHOS,** Erkenntnisformen in Natur- und Geisteswissenschaften (Pan-Bücherei, Gruppe: Philosophie, Nr. 20). 57 S. Leipzig 1940, Rudolf Birnbach, Abt. Pan-Verlag. Preis brosch. 2,50 M.

Dr. phil. habil. Dr. med. SIEGFRIED **KOLLER,** Vorstand der Statistischen Abteilung des Kerckhoff-Forschungs-Institutes Bad Nauheim, Graphische Tafeln zur Beurteilung statistischer Zahlen. VII + 73 S. m. 6 Abb. u. 15 Tafeln. Dresden und Leipzig 1940, Verlag Theodor Steinkopff. Preis geb. 10 M.

# NACHRICHTEN

### Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Die zum Sonnabend, den 4. Mai 1940, nach Braunschweig einberufene wissenschaftliche Tagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik war außerordentlich gut besucht. Über hundert Teilnehmer hatten sich zu einzelnen Vorträgen eingefunden. Das Programm war fast zu reichhaltig für eine eintägige Tagung. Die Vorträge und Diskussionen des Vormittages waren Fragen der Hydro- und Aerodynamik, die des Nachmittages in der Hauptsache Fragen der Elastizitätstheorie gewidmet. Folgende Vorträge wurden gehalten:

A. Busemann, Braunschweig: Neuere Ansätze in der Gasdynamik,

K. Oswatitsch, Göttingen: Kondensationserscheinungen in Überschalldüsen,

J. Weissinger, Adlershof: Der Tragflügel bei unsymmetrischer Anströmung,

XUM

H. Schlichting, Braunschweig: Über den Umschlag laminar-turbulent bei beschleunigter und verzögerter Strömung,

Pretsch, Göttingen: Stabilität einer laminaren Grenzschicht bei Druckgefälle.

H. Görtler, Göttingen: Über eine Instabilität der laminaren Grenzschicht an konkaven Wänden,

H. Reichhardt, Göttingen: Über Wärmeübertragung in turbulenter Strömung,

K. Voeltz, Braunschweig: Schräggestellter Ringspalt.

C. Weber, Dresden: Über die Minimalsätze der Elastizitätstheorie,

H. Fromm, Danzig: Führungskraft des rollenden Rades und Schiebebewegung des Fahrzeuges,

H. Neuber, Braunschweig: Schubmittelpunkt u. Querschnittsverwölbung dünnwandiger Träger unterhalb der Beulgrenze,

Th. Pöschl, Karlsruhe: Mikroaufnahmen des Zerreißvorganges von Stahl,

H. Baumann, Hamburg: Über die Allgemeingültigkeit des Schuler-Prinzipes,

E. Weinel, Jena: Torsionsbeulung eines Plattenstreifens. 172

### Persönliches.

Es verstarben:

der frühere o. Prof. für Maschinenbau an der Techn. Hochschule Berlin, Geh. Regierungsrat Dr. E. Josse,

der o. Prof. für Wehrtechnik, Physik und Ballistik an der Techn. Hochschule und Honorarprof. an der Universität Berlin, General der Artillerie Dr.-Ing. K. Becker, Chef des Heereswaffenamtes.

# ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

v. Borbély: **Über einen Grenzfall der instationären räumlichen Tragflügelströmung.** Z. angew. Math. Mech. Bd. 18 (1938), S. 319 bis 342.

In einer in dieser Zeitschrift (Bd. 19 [1939], S. 384) erschienenen Äußerung hat Herr Küßner die Erweiterung der Wirbelfadentheorie kritisiert, durch die der Verfasser und v. Borbély unabhängig voneinander eine Näherungslösung für die instationäre Bewegung des endlichen Flügels entwickelt haben. Es scheint mir, daß die Arbeit von Sears [1]), auf die Herr Küßner seine Bemerkungen stützt und deren Grundlage er als einwandfrei betrachtet, nur eine Näherungslösung aufstellt, deren Überlegenheit nicht so deutlich ist. Im Gegensatz zu Küßners Behauptungen, glaube ich, daß auch für den Fall des unendlichen Tragflügels mit sinusförmiger Abwindverteilung, diese Theorie durchaus nicht eine exakte Berechnung der Zirkulation ermöglicht, da sie, zwischen induzierter Geschwindigkeit und Zirkulation, dieselbe Beziehung benützt, die für den unendlichen Flügel gilt. Die numerischen Ergebnisse der groben Berechnung von Sears ermöglichen vielleicht keinen sinnvollen Vergleich mit denen der strengen Rechnung von v. Borbély. Es scheint jedoch, daß der Unterschied zwischen den von mir und Sears berechneten Werten des Auftriebes nicht sehr groß ist, auch nicht für hohe red. Frequenzen.

Turin. P. Cicala.

**Erwiderung.** Ich habe bereits in meiner ersten Zuschrift erwähnt, daß auch Herr Sears eine Näherung für schlanke Flügel benutzt. Der wenn auch kleine Induktionseffekt infolge endlicher Spannweite ergibt sich jedoch bei hoher reduzierter Frequenz nach Herrn Cicala und Herrn Sears in verschiedener Größenordnung, so daß nicht beide Theorien zugleich richtig sein können. Die Ursache dieser Diskrepanz liegt darin, daß Herr Cicala seine Größe $K$ willkürlich gleich der Summe der gebundenen und freien Wirbel längs der Flügeltiefe setzt, während $K$ in einer konsequenten Theorie, die ich demnächst veröffentlichen werde, ein komplizierter Ausdruck ist.

Göttingen. H. G. Küßner. 165

[1]) W. R. Sears: Proc. of the 5. Intern. Congress of Applied Mechanics 1938.

### Berichtigung

zu **„Interpolationsverfahren zur Berechnung von Flugbahnscharen . . .“** von H. Athen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 19 (1939), S. 361.

Herr Dr. Stange, Essen, auf dessen demnächst in dieser Zeitschrift erscheinende Ergänzungen zu meinem Aufsatz ich wegen ihrer Zweckmäßigkeit bei praktischen Rechnungen besonders hinweise, machte mich darauf aufmerksam, daß auf S. 363 im Anschluß an Formel (5) in $\Delta_w$ für $\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{z}$ ein Vorzeichenfehler enthalten ist; es muß heißen

$$\Delta_w = +\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{z}\right)^2 \cdot w_2 \left(\text{statt } \Delta_w = -\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{z}\right)^2 \cdot w_2\right).$$

Berlin-Frohnau. H. Athen. 170

### Nachtrag zu der Arbeit: Eigenschwingungen gedrückter Kreisplatten.

Z. angew. Math. Mech. Bd. 20 (1940), S. 37 bis 44.

Herr Professor Dr. Federhofer, Graz, macht mich darauf aufmerksam, daß Eigenschwingungen gedrückter Platten schon in seiner Arbeit „Biegungsschwingungen der in ihrer Mittelebene belasteten Kreisplatte“, Ingenieurarchiv Bd. 6 (1935), S. 68 bis 74, behandelt sind. In dieser Arbeit, die mir leider entgangen ist, werden sowohl auf Druck wie auf Zug beanspruchte, am Rande eingespannte Kreisplatten jedoch ohne federnde Stütze im Mittelpunkt untersucht, d. h. in meiner Bezeichnung der Fall $\varrho = 0$. Mir kam es vor allem darauf an, zu zeigen, daß man auch in komplizierten Fällen Gleichung und Randbedingung aus dem Hamiltonschen Prinzip einfach ableiten kann und zu untersuchen, wie sich die Frequenz der Grundschwingung durch die federnde Stützung ändert. Herr Professor Federhofer behandelt in der oben erwähnten Arbeit für die nicht gefederte Platte außer der Grundschwingung die Oberschwingungen mit $z$ Knotenkreisen ($z = 0; 1; 2$) und keinem oder einem Durchmesser als Knotenlinie, ferner solche mit zwei Durchmessern als Knotenlinie und keinem Knotenkreis. Er weist in seinem Schreiben darauf hin, daß man im letzten Fall bei sehr starker Federung und starkem Druck noch einen kleinen Bereich erhält, in dem die Frequenz kleiner ist als die der Schwingungen ohne Knotenlinie, so daß diese also hier erst an dritter Stelle kommen. Schließlich bemerkt Herr Federhofer noch, daß die am Schluß meiner Arbeit für den dort nur interessierenden Fall eines Durchmessers als Knotenlinie angewandte Knickbetrachtung im allgemeinen Fall zu der von Herrn Nadai 1915 aufgestellten Knickgleichung

$$J_{p+1}(z) = 0$$

führt.

Dresden. Willers. 166

Für den Textteil verantwortlich: Professor Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany.
Copyright 1939 by VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7.
— Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.